

1. O algoritmo Empirical Mode Decomposition, a transformada Hilbert-Huang e diferentes aplicações.

por Fernando A. Marengo *Rodriguez*, Dr. Ing.;
e-mail: fmarengorodriguez@yahoo.com.ar

Apresenta-se o algoritmo EMD (*Empirical Mode Decomposition*, ou “decomposição empírica de modos”) e suas aplicações para o processamento de sinais, como por exemplo, filtragem robusta de ruído, detecção dos componentes harmônicos e codificação digital de áudio. O EMD decompõe qualquer sinal real em uma sequência de funções puramente oscilatórias moduladas em amplitude e frequência, chamadas IMF (*Intrinsic Mode Functions*, ou “funções de modo intrínseco”). Estas funções permitem construir uma representação gráfica de energia-tempo-frequência dos dados de entrada, chamada transformada de Hilbert-Huang, de maior precisão do que outras ferramentas clássicas. Estas ferramentas foram desenvolvidas no Laboratório de Acústica y Electroacústica (Universidad Nacional de Rosario, Argentina).

PACS: 43.60.Ek; 43.60.Wy.

Palavras-chave: Processamento digital de sinais, *Empirical Mode Decomposition*, transformada Hilbert-Huang, distribuição energia-tempo-frequência, codificação de áudio.

1.1. Introdução

Qualquer sinal temporal com modulação de amplitude (AM) e de frequência (FM) suave pode ser descrito como uma função de tipo $c(t) = a(t) \times \cos[\phi(t)]$, onde $a(t)$ e $\phi(t)$ são a *amplitude* e a *fase instantânea*, respectivamente. De acordo com [1], esse sinal pode ser associado a uma função complexa de tipo $z(t) = a(t) \times \exp[i\phi(t)]$, chamado *sinal analítico*, mantendo a mesma informação que o sinal original. A vantagem do sinal analítico é que permite calcular a amplitude e fase com maior facilidade, pois $a(t) = |z(t)|$ e $\phi(t) = \text{Im}\{\ln[z(t)]\}$, onde $\text{Im}\{\bullet\}$ é a parte imaginária.

O algoritmo EMD [2], [3] é uma ferramenta de processamento digital de sinais que permite decompor qualquer sinal temporal $x(t)$ em uma série de funções puramente oscilatórias com modulação AM-FM suaves e facilmente caracterizáveis. Estas funções são chamadas IMF e podem ter associados seus próprios sinais analíticos.

O diagrama de fluxo do algoritmo EMD é mostrado na Figura 1. Este processo iterativo, conhecido como *peneiramento*, consiste em extrair as diferentes componentes oscilatórias, em forma recursiva, desde o detalhe mais fino (maior resolução) até o detalhe mais

grosso (menor resolução). Esta extração consiste em subtrair a **média local** $m(t)$ do sinal analisado $x(t)$. Essa média se calcula como a média entre as envoltórias superior $e_{\max}(t)$ e inferior $e_{\min}(t)$, que são calculadas via interpolação entre os máximos e mínimos locais do sinal em questão, respectivamente. Na verdade, este processo é iterativo porque o **detalhe local** $d(t)$ extraído da entrada pode não ser suficientemente simétrico em relação ao eixo horizontal. Esta simetria é importante, assim o detalhe poder ser analisado matematicamente com facilidade.

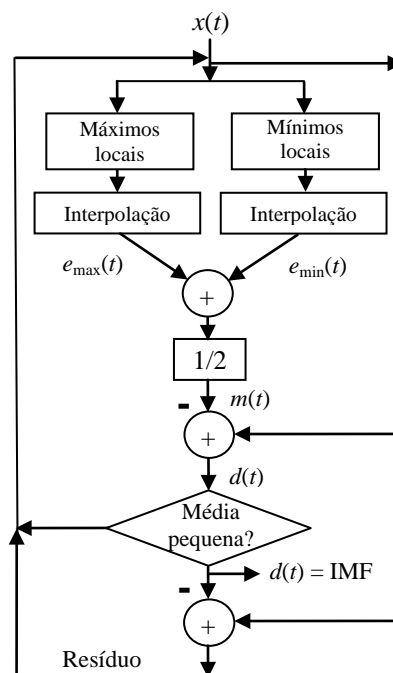


Figura 1: Algoritmo de EMD.

Um exemplo de análise de sinal com o método EMD se expõe na Figura 2. O painel (a) mostra o sinal de entrada $x(t)$, que consiste em uma soma de um senoide de amplitude 0,5 e frequência 0,02 e dois sinais de varredura parabólicos de amplitude unitária (cujas frequências estão contidas nas faixas [0,05; 0,1] e [0,08; 0,2]). O painel (b) mostra, para um pequeno intervalo temporal, a entrada junto às envoltórias superior $e_{\max}(t)$ (cor azul) e inferior $e_{\min}(t)$ (cor vermelho) como resultado da interpolação entre os máximos e mínimos locais da entrada, respectivamente. Nesse painel também se mostra em cor magenta a média local $m(t)$. Este sinal restado à entrada permite obter o detalhe local $d(t)$ mostrado no painel (c) (cor preta). Este sinal não é completamente simétrico ao redor do eixo horizontal, pois sua média (cor magenta) é diferente de zero. Por isso se realizam iterações sobre este mesmo sinal tantas vezes quantas forem necessárias até obter-se um sinal simétrico como o desenhado em cor preta no painel (d). Neste ponto, o detalhe é considerado a primeira função IMF.

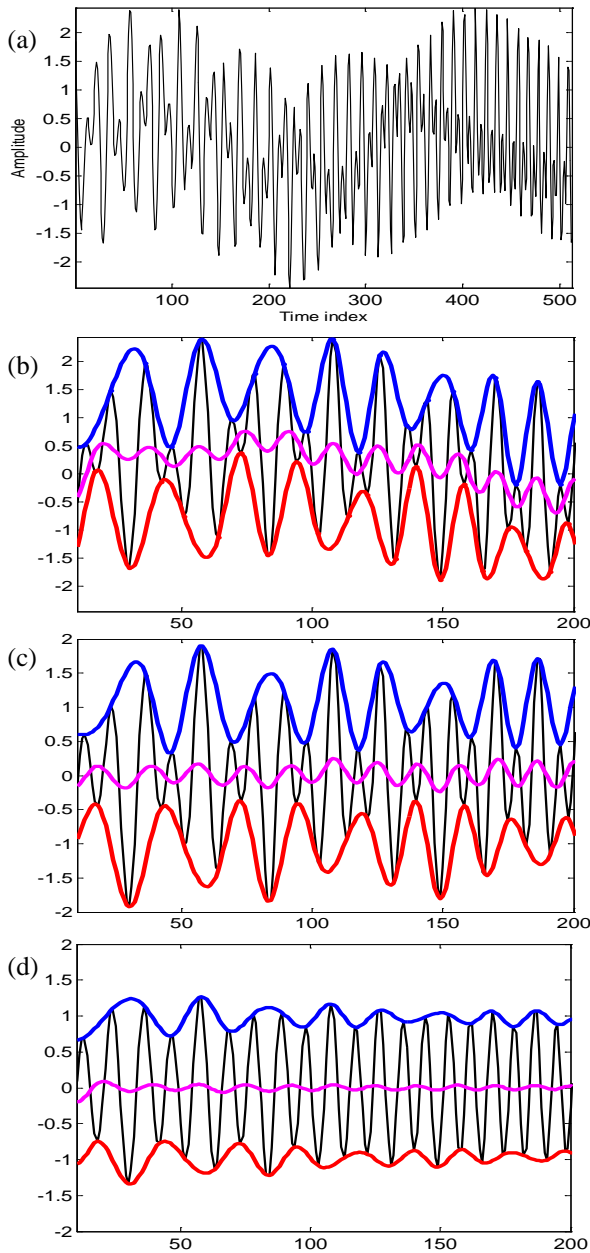


Figura 2: Sinais correspondentes à análise com EMD.

A análise de sinal com EMD continua deste modo iterando sobre o **resíduo**, que é a entrada sem o detalhe anteriormente calculado (primeira IMF). O próximo detalhe extraído é então outra IMF de seguinte ordem, que contém frequências menores. Este processo continua desta maneira até que o resíduo: 1) é desprezível ou 2) não contenha mais extremos locais, ou seja, é uma função monótona chamada **resíduo final** $r_N(t)$ (também chamada **resíduo**). Como resultado final, obtém-se um conjunto de funções IMF $c_k(t)$, de maior a menor frequência média que descrevem a entrada como:

$$x(t) = \sum c_k(t) + r_N(t). \quad (2)$$

A Figura 3 mostra as 4 funções IMF para o sinal da Figura 2 (a). Estes sinais estão ordenados de maior a menor frequência média. Note-se que as IMF de ordens 1 e 2 contêm os respectivos sinais de varredura que compõem a entrada. Aliás, a componente restante da entrada (o sinal senoidal) está contida na soma da IMF de ordem 4 e o resíduo $r_N(t)$. Estes sinais estão desenhados no painel inferior em cores preta e vermelha, respectivamente. Em conclusão, o algoritmo EMD permite obter funções que representam processos físicos do sinal analisado.

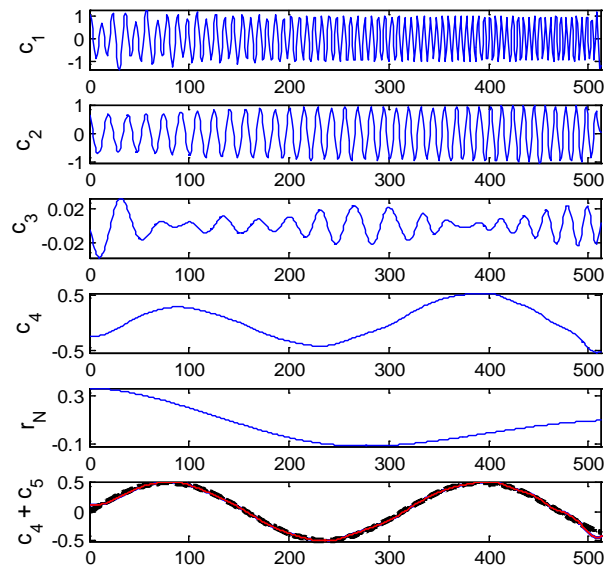


Figura 3: Funções de modo intrínseco associadas ao sinal de entrada. O gráfico inferior contém a soma do resíduo com a IMF de ordem 4 (cor vermelha), e o sinal senoidal contido na entrada (cor preta).

1.2. Aplicações

Na Figura 3 observa-se que a quantidade de funções IMF é pequena. Esse número depende do sinal analisado, e o máximo é $\log_2(K)$ —para o caso de ruído branco—, onde K é a quantidade das amostras do sinal digital analisado [4]. Esta propriedade de poucas IMF pode ser útil para codificação de áudio [5] ou imagens [6]. Finalmente, observa-se na Figura 3 que o espectro da IMF de ordem 3 está contida entre um dos sinais de varredura e o senoidal puro da entrada. Em alguns casos, esta informação pode ser suprimida, e a senoide da entrada detectada em uma função só. Isto pode ser realizado via algoritmo EEMD (em inglês, EMD por conjuntos) [7]. Desta maneira, EMD e EEMD permitem decompor a entrada em termos de sinais fisicamente relevantes de forma clara.

Outra aplicação de EMD muito difundida é filtragem robusta de ruído [8], [9], [10]. Nestes casos, o ruído está contido nas IMF de primeira e última ordens. Ao

subtrair essas funções da entrada (*denoising* e *detrending*), obtém-se o sinal com muito melhor relação sinal-ruído do que a entrada.

1.3. Transformada Hilbert-Huang

Além do método EEMD que permite agrupar melhor os sinais em faixas espectrais adjacentes, há outras ferramentas associadas à EMD. Por exemplo, ao se aplicar a transformada de Hilbert a cada IMF $a(t) \times \cos[\phi(t)]$, obtém-se sua componente em quadratura $a(t) \times \sin[\phi(t)]$, que, multiplicada pela unidade imaginária i , permite obter o sinal analítico associado $a(t) \times \exp[i\phi(t)]$. Isto é conhecido como **transformada de Hilbert-Huang** ou HHT [1], e permite fazer uma representação energia-tempo-frequência da entrada com maior precisão:

$$x(t) = \sum Re\{ a_k(t) \times \exp[i\phi_k(t)] \} \quad (3)$$

Os fatores da equação (3) explica por que a transformada HHT é também conhecida como **transformada de Fourier generalizada**. Para um tom de 2 kHz seguido de outro tom de 1 kHz, a HHT e o espectrograma são como os demonstrados na Figura 4.

1.4. Conclusão

Este artigo apresenta os lineamentos básicos das ferramentas EMD e HHT e suas aplicações e vantagens na área de processamento digital de sinais.

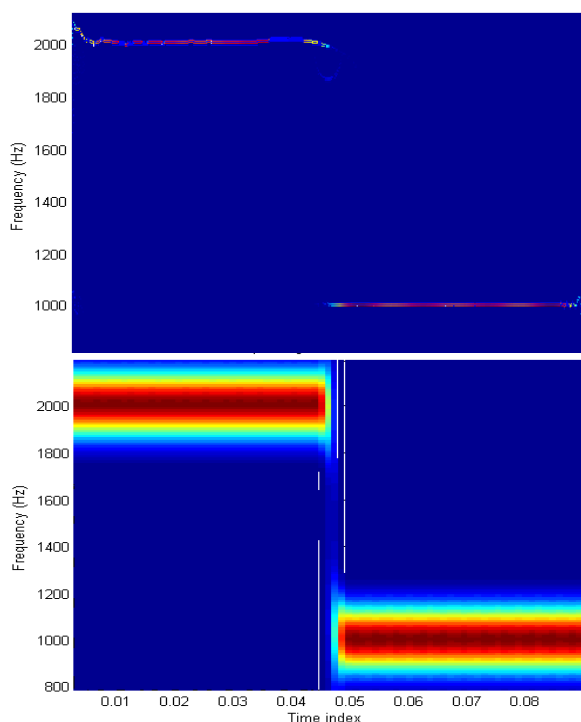


Figura 3: HHT (acima) e espectrograma (abaixo).

Referências

- [1] S. Hahn. *Hilbert Transforms in Signal Processing*. Artech House, London, UK, 1996.
- [2] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, H. H. Liu. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. Royal Soc. London (A)*:454, 903–995. November 1998.
- [3] G. Rilling, P. Flandrin, P. Gonçalves. On Empirical Mode Decomposition and its algorithms, *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP-03*, Grado (I), June 2003.
- [4] Z. Wu, N. E. Huang. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proc. Royal Soc. London(A)*:460, 1597–1611. June 2004.
- [5] F. A. Marengo Rodriguez, F. Miyara. Representación de Señales de Audio con Descomposición Empírica de Modos y Submuestreo Adaptativo. *Prim. Jorn. Reg. de Acúst. (AdAA2009)* A056R, Rosario, Argentina. November 2009.
- [6] A. Linderhed. 2D empirical mode decompositions in the spirit of image compression. *Wavelet and Independent Component Analysis Applications IX*. Orlando, FL., SPIE Proceedings, 4738, 1-8. 2002.
- [7] Z. Wu, N. E. Huang. Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method, *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1):1–41. 2009.
- [8] F. A. Marengo Rodriguez, A. Federico, G. H. Kaufmann. Phase measurement improvement in temporal speckle pattern interferometry using Empirical Mode Decomposition. *Optics Com.*, 275(1):38–41. 2009.
- [9] F. A. Marengo Rodriguez, A. Federico, G. H. Kaufmann. Hilbert transform analysis of a time series of speckle interferograms with a temporal carrier. *Applied Optics*, 47(9):1310–1316. 2008.
- [10] M. Neyra Astudillo, V. L. Ortega Paredes, N. Nuñez, J. E. Ruzzante, M. L. López Pumarega, J. A. Marengo, F. A. Marengo Rodriguez. Ruido barkhausen en álabes de turbina, *VIII Congreso Regional de ENDE*. Campana, Buenos Aires, Argentina. August 2011.