Segundo examen parcial de Teoría de los Circuitos I

Tema 1. Del circuito de la fig. 1 determinar la corriente de rama I_x según se indica. Resolver aplicando el método de los nudos tomando el nudo 4 como referencia. Dato adicional: $\Delta_Y = 0,0501$

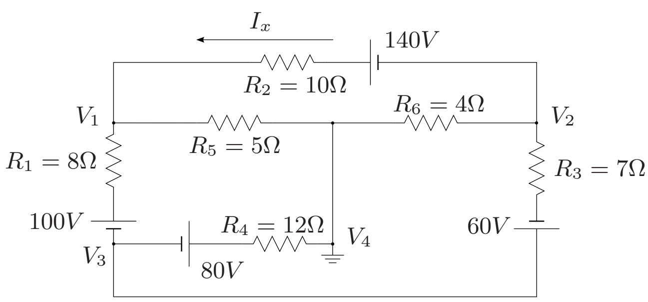

Figura 1: Determinar I_x

Solución

$I_x = 5,15A$

Salida numérica generada por octave

```
Y =
   0.425000  -0.100000  -0.125000
  -0.100000   0.492857  -0.142857
  -0.125000  -0.142857   0.351190

I =
   26.5000
  -22.5714
  -10.5952

det(Y) = 0.0501042
V1 = 40.8375
V2 = -47.6626
V3 = -35.0223
Ix = -5.14999
```

Tema 2. Encontrar la máxima potencia que puede recibir la carga R_{carga} del circuito de la fig. 2.

Solución

$P_{max} = 16W$

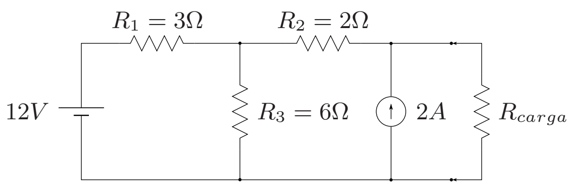

Figura 2: Máxima transferencia de potencia

Tema 3. En el circuito de la fig. 3 se conecta el interruptor a la posición 1 en $t = 0$. Luego se cambia el interruptor de la posición 1 a la posición 2 en $t = 85ms$. Calcular por el método de la transformada de Laplace la tensión del capacitor, con $v_C(0) = 20V$. Expresar el resultado en el tiempo utilizando funciones reales de t, validas para todo $t > 0$.

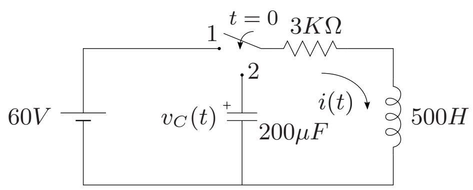

Figura 3: Circuito RLC con retardo de tiempo

Solución

$i(t) = 20 \times 10^{-3}\left(1 - e^{-6t}\right)$

$V_C(s) = \left(\frac{10+j10}{s+3+j} + \frac{10-j10}{s+3-j}\right) e^{-s85\times10^{-3}}$

$v_C(t) = 20e^{-3(t-85\times10^{-3})}\left[\cos(t - 85 \times 10^{-3}) + \operatorname{sen}(t - 85 \times 10^{-3})\right] u(t-85\times10^{-3})$

Planteo

Con el interruptor en la posición 1 la suma de tensiones en la malla es

$$\begin{aligned} V &= Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{V}{s} &= RI(s) + L\left[sI(s) - i(0)\right] = \left[R + sLI(s)\right] \end{aligned}$$

donde $I(s) = \mathcal{L}\left[i(t)\right]$. Despejando $I(s)$ y expandiendo en fracciones simples

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V}{s(R + sL)} = \frac{V/R}{s} - \frac{V/R}{(s + R/L} \\ i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{V/R}{s} - \frac{V/R}{(s + R/L}\right] = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \end{aligned}$$

Al pasar el interruptor de la posición 1 a la 2 en $t_0 = 85 \times 10^{-3}s$ las condiciones inicales afectan a las funciones temporales de tensiones y corrientes en un tiempo

$t = t_0$, y la transfomada de Laplace este corrimiento debe tenerse en cuenta. La ecuación de equilibrio de la malla se plantea considerando la referencia de $v_C(t)$

$$\begin{aligned} v_R(t) + v_L(t) - v_C(t) &= 0 \\ Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - v_C(t) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

como la tensión en el capacitor $v_C(t)$ es una subida para la corriente $i(t)$, su relación es inversa aditiva

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Para despejar la función incognita $v_C(t)$, se transfoman las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{aligned} RI(s) + sLI(s) - Li(t_0)e^{-st_0} - V_C(s) = 0 \\ I(s) = -sCV_C(s) + Cv(t_0)e^{-st_0} \end{aligned}$$

y se resuelve el sistema de ecuaciones para $V_C(s)$

$$V_C(s) = e^{-st_0}\left[\frac{sv(t_0) + \frac{R}{L}v(t_0) - \frac{1}{C}i(t_0)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{C}}\right]$$

Resolución numérica

Para resolver se debe desarrollar $V_C(s)$ en fracciones simples. Se usa t_0 en lugar de su valor numérico para simplificar la escritura

$$\begin{aligned} V_C(s) &= e^{-st_0}\left[\frac{s20 + 80}{s^2 + 6s + 10}\right] = e^{-st_0}\left[\frac{s20 + 80}{(s + 3 + j)(s + 3 - j)}\right] = \frac{Ae^{-st_0}}{s + 3 + j} + \frac{A^*e^{-st_0}}{s + 3 - j} \\ A &= \lim_{s\to -3-j}\frac{s20 + 80}{(s + 3 - j)} = 10 + j10 \\ A^* &= 10 - j10 \end{aligned}$$

La transformada inversa de $V_C(s)$ es una función compleja, mediante la igualdad de Euler se pone en terminos de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} v_C(t) &= e^{-3(t-t_0)}\left[(10 + j10)e^{-(3+j)(t-t_0)} + (10 - j10)e^{-(3-j)(t-t_0)}\right]u(t - t_0) \\ v_C(t) &= e^{-3(t-t_0)}\left[(10 + j10)e^{-j(t-t_0)} + (10 - j10)e^{j(t-t_0)}\right]u(t - t_0) \\ v_C(t) &= 20e^{-3(t-t_0)}\left[\left(\frac{e^{j(t-t_0)} + e^{-j(t-t_0)}}{2}\right) + \left(\frac{e^{j(t-t_0)} - e^{-j(t-t_0)}}{2j}\right)\right]u(t - t_0) \end{aligned}$$

Finalmente

$$v_C(t) = 20e^{-3(t-t_0)}\left[\cos(t - t_0) + \mathrm{sen}(t - t_0)\right]u(t - t_0)$$