Examen recuperatorio de Teoría de los Circuitos I

Tema 1. Recuperatorio primera etapa.

a. En el circuito de la figura 1 se pide encontrar la corriente por el inductor aplicando superposición.

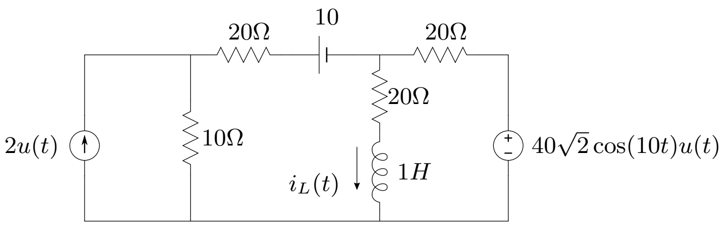

Figura 1: Circuito RL con condiciones iniciales.

b. Aplicando transformada de Laplace, encontrar la tensión $v_o(t)$ indicada en el circuito de la figura 2.

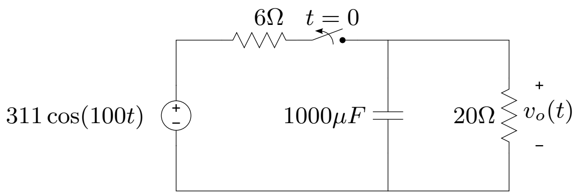

Figura 2: Tensión de salida

- Soluciones

a. **Resolución numérica**

La corriente natural por el inductor es (pasivando todas las fuentes)

$$i_n(t) = Ae^{-\frac{R_{eq}}{L}t} = Ae^{-32t}$$

donde $R_{eq} = ((10+20)//20) + 20 = 32\Omega$.
Sea i_{f_1} la corriente forzada por el inductor que resulta de pasivar todas las fuentes menos la de corriente

$$i_{f_1} = 2 \cdot \frac{(10//(20+20//20))(20//20)}{(20+20//20)(20)} = \frac{1}{4}$$

Sea i_{f_2} la corriente forzada por el inductor que resulta de pasivar todas las fuentes menos la fuente de tensión de $10V$

$$i_{f_2} = -10\frac{20//20}{(20+10+20//20)\,20} = -\frac{1}{8}$$

La corriente forzada por el inductor debido a la fuente cosenoidal viene dada por la solución particular de la ODE no homogénea del circuito en términos de $i_L(t)$, es decir el régimen permantente de alterna en el inductor

$$i_{f_3} = 1{,}02\cos(10t - 17{,}4^\circ)$$

La respuesta general de corriente por el inductor será entonces la suma de todas las forzadas mas la natural

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_n + i_{f_1} + i_{f_2} + i_{f_3} \\ &= Ae^{-32t} + 0{,}25 - 0{,}125 + 1{,}02\cos(10t - 17{,}4°) \end{aligned}$$

en $t = 0$ la única corriente por L es debido a la fuente de $10V$

$$\begin{aligned} i_L(0) &= -0{,}125 = A + 0{,}25 - 0{,}125 + \cos(-17{,}4°) \Rightarrow \\ A &= -1{,}204 \end{aligned}$$

La respuesta particular de corriente en el inductor es

$$i_L = -1{,}204e^{-32t} + 0{,}125 + \cos(10t - 17{,}4°) \tag{1}$$

que se grafica en la figura 3

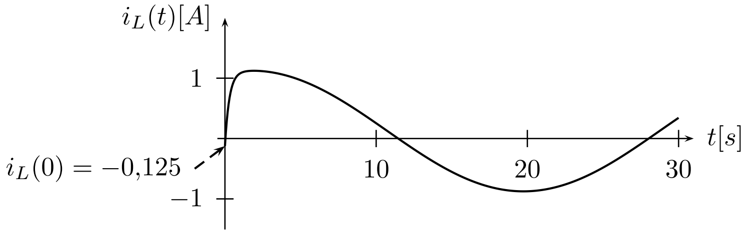

Figura 3: Corriente total en el inductor, ecuación eq:iparticularenL.

b. Para $t > 0$, eligiendo las referencias de tensión y corriente en forma adecuada, en la malla RC se cumple

$$I_C(s) + I_o(s) = 0 \tag{2}$$
$$V_C(s) = V_o(s) \tag{3}$$

donde

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0) \tag{4}$$
$$I_o(s) = \frac{V_o(s)}{R_o} \tag{5}$$

siendo R_o la resistencia de 20Ω. Operando se tiene

$$V_C(s) = \frac{v_C(0)}{s + \frac{1}{R_oC}} = V_o(s) \tag{6}$$

Para determinar $v_C(0)$ se puede aplicar el método fasorial y encontrar el régimen permanente en $t = 0^-$, o buscar la respuesta forzada resolviendo la ODE no homogénea del circuito en términos de la tensión $v_C(t)$.
Llamando R_i a la resistencia de 6Ω, por método fasorial, en $t = 0^-$ se cumple

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_{R_i} + \bar{\mathbf{V}}_C \tag{7}$$
$$\bar{\mathbf{I}}_{R_i} = \bar{\mathbf{I}}_C + \bar{\mathbf{I}}_{R_o} \tag{8}$$

reemplazando y operando

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} &= \bar{\mathbf{I}}_{R_i} R_i + \bar{\mathbf{V}}_C && (9) \\ &= \left(\bar{\mathbf{I}}_C + \bar{\mathbf{I}}_{R_o}\right) R_i + \bar{\mathbf{V}}_C && (10) \\ &= \left(j\omega C\bar{\mathbf{V}}_C + \frac{\bar{\mathbf{V}}_C}{R_o}\right) R_i + \bar{\mathbf{V}}_C && (11) \\ &= \bar{\mathbf{V}}_C \left(j\omega CR_i + \frac{R_i}{R_o} + 1\right) && (12) \end{aligned}$$

Luego

$$\bar{\mathbf{V}}_C = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\left(j\omega C R_i + \frac{R_i}{R_o} + 1\right)} = \frac{220}{j100 \cdot 1 \times 10^{-3} + \frac{6}{20} + 1} \tag{13}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_C = 139{,}512 - j64{,}390 = 153{,}65\angle - 24{,}77^\circ \tag{14}$$

en $t = 0$

$$v_C(0) = 153{,}65\sqrt{2}\cos(-24{,}77^\circ) = 197{,}3 \tag{15}$$

entonces

$$V_o(s) = \frac{v_C(0)}{s + \frac{1}{R_o C}} = \frac{197{,}3}{s + 50} \tag{16}$$

Antitransformando, la tensión de salida para $t > 0$ será

$$v_o(t) = 197{,}3 e^{-50t} \tag{17}$$

.