

Guia 5. Fasores

- Utilizando el metodo fasorial, encontrar la respuesta de estado estable de la tensión en el capacitor $v_C(t)$ del circuito de la figura 1.

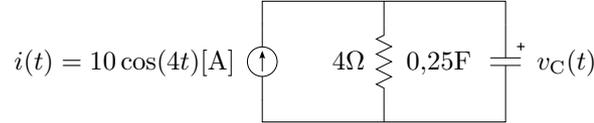


Figura 1: Régimen permanente fasorial.

- Encontrar la respuesta de estado estable de la corriente $i(t)$ del circuito de la figura 2 y construir el diagrama fasorial de tensiones.

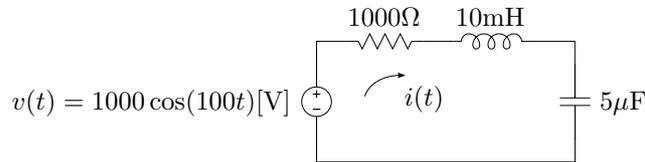


Figura 2: Régimen permanente y diagrama fasorial.

- Encontrar la $i_T(t)$ del nudo de la figura 3, construir el diagrama fasorial de corrientes y determinar la diferencia de fase que existe entre cada fasor $\bar{\mathbf{I}}_1$, $\bar{\mathbf{I}}_2$ e $\bar{\mathbf{I}}_3$.

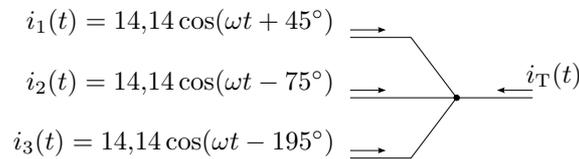


Figura 3: Sumatoria fasorial de corrientes.

- Para el circuito de la figura 4 se pide
 - calcular la impedancia total equivalente \mathbf{Z}_T
 - construir diagrama fasorial completo de tensiones y corrientes
 - determinar la diferencia de fase entre $\bar{\mathbf{V}}_T$ y $\bar{\mathbf{I}}_T$.
- Un circuito RC paralelo como el de la figura 5 tiene una admitancia equivalente $\mathbf{Y} = \frac{1}{R_P} + jX_{C_P}$. Determinar el valor de cada elemento del circuito serie que tenga una impedancia de $\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}}$.
- En un circuito serie RC con $R = 8\Omega$ y $C = 30\mu\text{F}$ alimentado con un generador de frecuencia variable se desea que la corriente adelante 30° a la tensión. Calcular a que frecuencia f debe oscilar el generador para producir dicho adelanto.

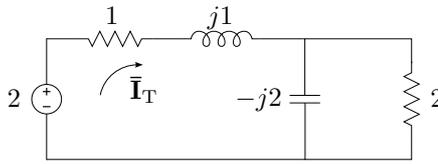


Figura 4: Impedancia equivalente y diagrama fasorial.

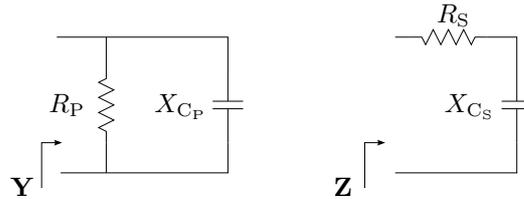


Figura 5: Circuitos serie-paralelo equivalentes.

7. Dadas las tensiones en los elementos de la figura 6, aplicando el método fasorial se pide
- calcular la tensión $v_T(t)$ y corriente $i_T(t)$,
 - determinar la lectura del voltímetro,
 - construir el diagrama fasorial completo.

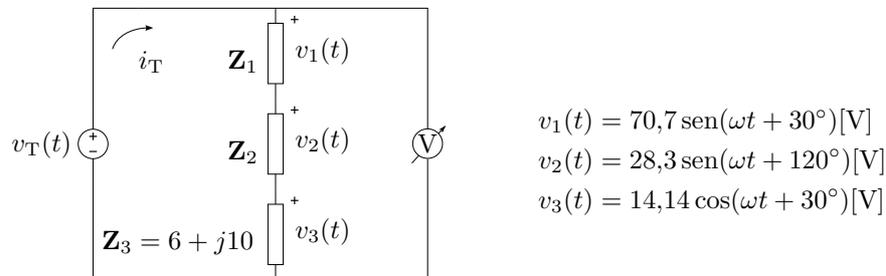


Figura 6: Régimen permanente senoidal.

8. Encontrar la impedancia total equivalente del circuito de la figura 7 y construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes.
9. Para el circuito de la figura 8 se pide:
- aplicando método fasorial encontrar el fasor de corriente \bar{I}_T y su correspondiente $i_T(t)$ (utilizar fasores eficaces),
 - trazar diagrama fasorial de tensiones ($\bar{V}_T, \bar{V}_{R_1}, \bar{V}_L, \bar{V}_{R_2} = \bar{V}_C$) y de corrientes ($\bar{I}_T, \bar{I}_a, \bar{I}_b$),
 - construir el triángulo de potencias del circuito.

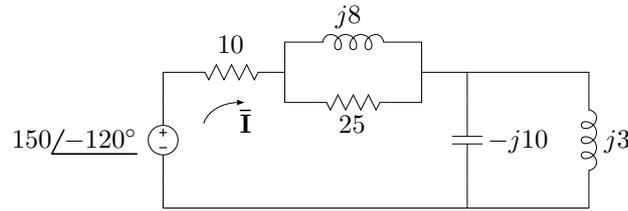


Figura 7: Impedancia equivalente y diagrama fasorial.

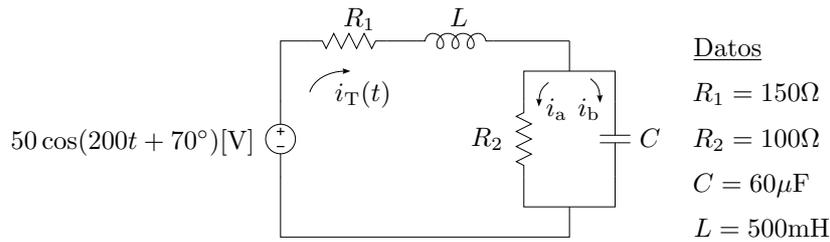


Figura 8: Cálculo fasorial de tensiones y corrientes.

10. Dado el circuito de la figura 9 se pide aplicar cálculo fasorial para
- encontrar el fador de corriente \bar{I} y su correspondiente $i(t)$
 - calcular la tensión eficaz V_{AB}
 - hacer el diagrama fasorial considerando una Z_{eq} entre los puntos A y B
 - deducir y calcular la potencia activa P entregada por la fuente.

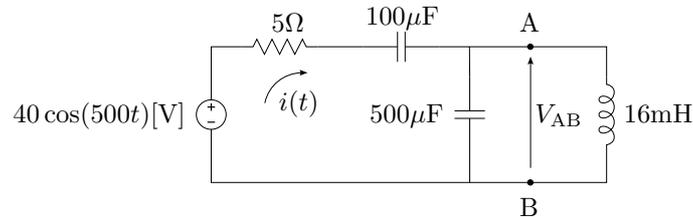


Figura 9: Cálculo de potencia y tensión eficaz.

11. Encontrar el valor de capacidad C que produce un atraso de corriente de 30° respecto de la tensión aplicada en el circuito de la figura 10. Hallar el fador corriente correspondiente a $i(t)$ y construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes completo.
12. La corriente de régimen que circula por un circuito serie RLC excitado por una fuente $v_{in}(t)$ está retrasada 30° respecto a la tensión aplicada. El valor máximo de la tensión en la bobina es el doble de la correspondiente al capacitor y $v_L = 10 \text{ sen}(1000t) \text{ V}$.
- Hallar los valores de L y C sabiendo que $R = 20\Omega$.

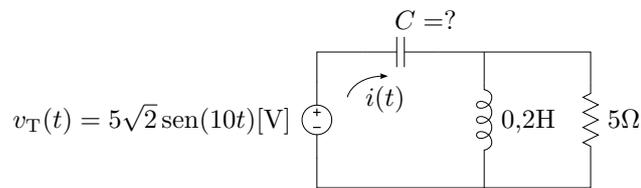


Figura 10: Hallar el valor de C .

- Hallar la corriente del circuito $i(t)$, y la fuente de excitación $v_{in}(t)$.

13. Dado el diagrama fasorial de la figura 11 se pide determinar:

- parámetros del circuito equivalente serie R_s y L_s
- parámetros del circuito equivalente paralelo R_p y L_p

Para ambos casos la frecuencia es de 50Hz .

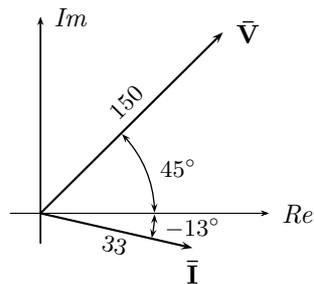


Figura 11: Diagrama fasorial.

14. A un circuito serie RLC con $R = 5\Omega$, $L = 0,02\text{H}$ y $C = 80\mu\text{F}$, se aplica una tensión senoidal de frecuencia variable, determinar los valores de ω para los que la corriente
- a. adelanta 45° a la tensión,
 - b. está en fase con la tensión y
 - c. atrasa 45° a la tensión.
15. Encontrar el valor de R_1 en el circuito de la figura 12 para que el factor de potencia sea de 0,891 en adelanto.
16. Calcular el valor de \bar{V}_1 del circuito de la figura 13 tal que la corriente por la resistencia sea nula
17. Encontrar la tensión \bar{V}_{AB} e indicarla en el diagrama fasorial de tensiones del circuito de la figura 14.

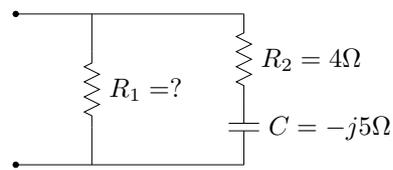


Figura 12: Factor de potencia.

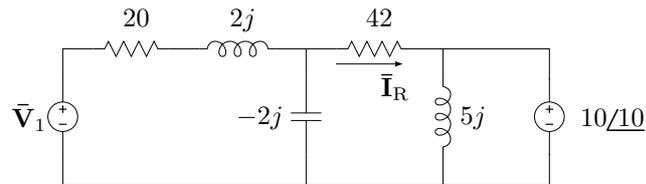


Figura 13: Calcular \bar{V}_1 tal que $\bar{I}_R = 0$.

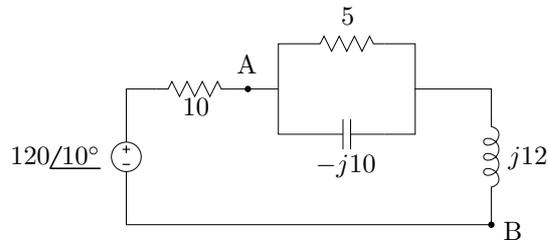


Figura 14: Tensión \bar{V}_{AB} en régimen permanente sinusoidal.

18. En el circuito de la figura 15 la corriente \bar{I} atrasa a la tensión \bar{V} un ángulo φ . Bajo esta condición

- dibujar el diagrama fasorial completo de tensiones y corrientes,
- indicar en el diagrama fasorial de tensiones la tensión \bar{V}_{AB} .

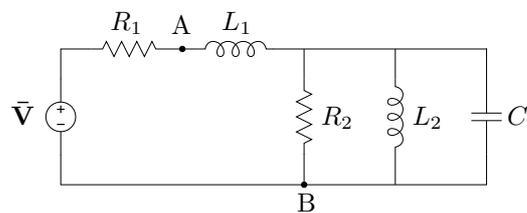


Figura 15: Diagrama fasorial y tensión \bar{V}_{AB} .

19. Para el circuito de la figura 16 se pide construir el diagrama fasorial completo de tensiones y corrientes para $C = 1,66\text{mF}$ y $C = 5\text{mF}$.
20. Un sistema capacitivo alimentado con excitación senoidal disipa una potencia $P = 7200\text{W}$ con un factor de potencia $fp = 0,334$. Se sabe que los valores de

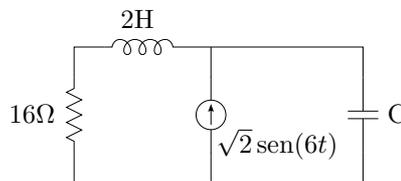


Figura 16: Circuito RLC con fuente de corriente.

resistencia y capacidad del sistema son $R = 2\Omega$ y $C = 470\mu\text{F}$ respectivamente. Se pide

- a. calcular la frecuencia de la fuente de alimentación senoidal,
 - b. calcular la tensión eficaz de la fuente, la caída de cada elemento, y la corriente eficaz,
 - c. construir el diagrama fasorial de tensiones y corriente, considerando la tensión de alimentación con fase 0° .
- 21.** Sobre un circuito RLC serie se miden las siguientes tensiones $V_T = 220\text{V}$, $V_C = 220\text{V}$ y $V_L = 438,2\text{V}$. Sabiendo que la componente resistiva del circuito es de 10Ω , se pide
- a. calcular el $\cos \varphi$, el fasor de corriente \bar{I} y construir el diagrama fasorial de tensiones,
 - b. construir el triángulo de potencias,
 - c. si se modifica el valor de C para que el $\cos \varphi$ sea de 0,95 en atraso ¿cómo se modifica el triángulo de potencias?
- 22.** Sean dos impedancias en serie tal que $\mathbf{Z}_T = 1 + j2\Omega$ (figura 17). Sabiendo que las tensiones son $v_2(t) = 31,6 \cos(\omega t + 73,4^\circ)$ y $v_T = 20 \cos(\omega t - 35^\circ)$, se pide
- a. calcular el fasor \bar{V}_1 ,
 - b. deducir que medirá un voltímetro colocado en los bornes de \mathbf{Z}_1 , \mathbf{Z}_2 y \mathbf{Z}_T ,
 - c. construir el diagrama fasorial de tensiones,
 - d. construir el triángulo de potencias.

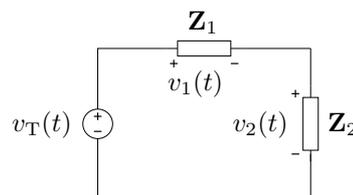


Figura 17: Impedancias en serie.

23. Mediante la conexión de capacitores en paralelo se modifica el f.p. desde 0,65 en retraso a 0,90 en retraso de una carga de 300W conectada a la distribución domiciliaria (220V-50Hz). Se pide
- calcular la capacidad C de los capacitores agregados en paralelo,
 - construir los triángulos de potencia antes y después de la corrección.
24. Se quiere encontrar las constantes R y L de una bobina real. Para esto se utiliza una resistencia patrón de $R_P = 10\Omega$. Al conectar la resistencia patrón en serie con la bobina real y alimentar el circuito se miden las siguientes tensiones: $V_{R_{patron}} = 20V$ en la resistencia patrón, $V_{bobina} = 22,4V$ en los bornes de la bobina y $V_T = 36V$ la tensión de alimentación. Si la frecuencia de alimentación es de $f = 50Hz$, calcular R y L del inductor real.
25. La corriente que circula por un circuito serie RLC está retrasada 30° con respecto a la tensión aplicada. El valor máximo de la tensión en la bobina es el doble de la correspondiente al capacitor y vale $v_L(t) = 10 \sin(100t)[V]$. Se pide hallar los valores de L y C sabiendo que $R = 20\Omega$.
26. Siendo $\mathbf{Z}_A = 9,6/\underline{-51,3^\circ} = 6 - j7,5$, $\mathbf{Z}_B = 8,93/\underline{26,6^\circ} = 8 + j4$ y $\mathbf{Z}_C = 6,7/\underline{65,3^\circ} = 2,8 + j6,1$ en el circuito de la figura 18, se pide:
- la corriente total $\bar{\mathbf{I}}$, y las corriente en las impedancias \mathbf{Z}_A y \mathbf{Z}_B ,
 - la potencia activa en cada impedancia y la potencia activa total con su verificación,
 - el factor de potencia del circuito,
 - diagrama fasorial completo.

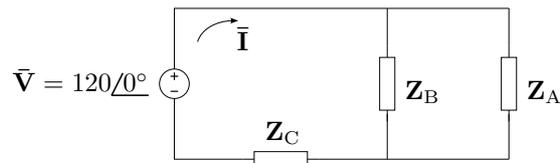


Figura 18: Calcular corriente y potencia activa de cada elemento.

27. Dado el circuito de la figura 19 se pide:
- encontrar $i(t)$,
 - construir el diagrama fasorial completo de tensiones (\bar{V}_{R_1} , \bar{V}_C , \bar{V}_L , \bar{V}_{R_2} , \bar{V}) y corrientes ($\bar{\mathbf{I}}$, $\bar{\mathbf{I}}_L$, $\bar{\mathbf{I}}_{R_2}$),
 - determinar la diferencia de fase entre \bar{V} y $\bar{\mathbf{I}}$,
 - construir el triángulo de potencias.

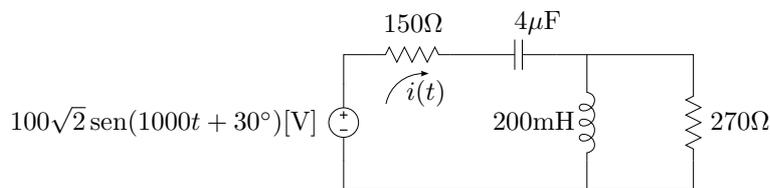


Figura 19: Cálculo de potencia en régimen permanente sinusoidal.

28. El diagrama fasorial de la figura 20 se obtiene al aplicar una tensión sinusoidal $v(t) = 15 \cos(10t)$ a un circuito serie, los valores son $|V_R| = 8V$, $|V_L| = 1,03V$ y $|V_C| = 8V$. Determinar a partir de éste:

- el valor de los elementos pasivos que conforman el circuito,
- el $\cos \varphi$ del sistema,
- el triángulo de potencias utilizando el método de potencia compleja y comprobando con el cálculo de la potencia en cada elemento.

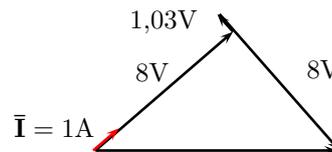


Figura 20: Diagrama fasorial de tensiones.

29. Demostrar que la capacidad en paralelo necesaria para corregir el factor de potencia de un sistema viene dada por

$$C = \frac{P(\tan \varphi_0 - \tan \varphi_f)}{V^2 \omega} \quad (1)$$

con P la potencia activa y V la tensión de alimentación del sistema, y $\cos \varphi_0$ y $\cos \varphi_f$ los factores de potencia inicial y final respectivamente.

30. En el circuito de la figura 21 se dan valores arbitrarios a R y jX_L . Se pide:
- a. demostrar analíticamente que para cualquier par de valores de R y jX_L el valor eficaz de la diferencia de potencial V_{AB} es siempre $50V$,
 - b. construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes para un par cualquiera de valores de R y jX_L ,
 - c. señalar en el diagrama fasorial el fasor \bar{V}_{AB} .

31. Para el circuito de la figura 22 se pide:

- a. calcular la tensión \bar{V}_{AB} ,

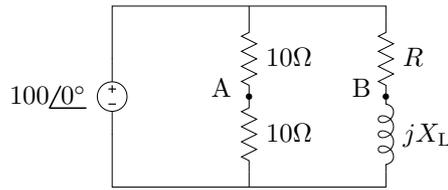


Figura 21: Tensión \bar{V}_{AB} de valor eficaz constante.

- b. construir el diagrama fasorial completo (tensiones y corrientes),
- c. indicar en el diagrama fasorial la tensión \bar{V}_{AB} ,
- d. construir el triángulo de potencias,
- e. calcular la potencia en los elementos resistivos.

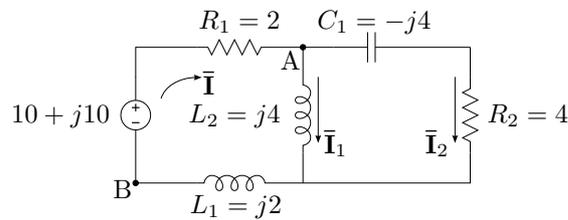


Figura 22: Calcular \bar{V}_{AB} .

- 32.** El circuito de la figura 23 es el equivalente de un motor asíncrono en régimen permanente nominal. Z_e y Z_r representan respectivamente las impedancias del estator y rotor. La resistencia R_c representa las pérdidas en el hierro y X_M la reactancia de magnetización. En estas condiciones de funcionamiento el motor consume una potencia de 25KW con un $\cos \varphi = 0,77$. Se pide:
- a. calcular los valores de R_c y X_M ,
 - b. determinar la potencia de pérdida en el hierro (potencia en R_c),
 - c. calcular la potencia reactiva necesaria para llevar el f.p. a 0,9 en atraso.

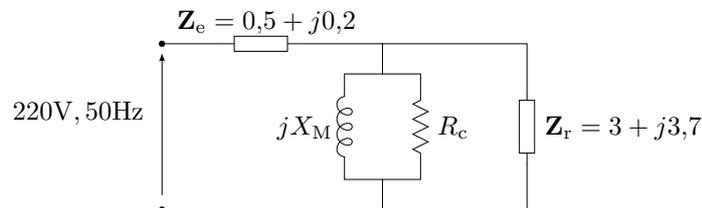


Figura 23: Potencia y factor de potencia.

- 33.** Una carga inductiva de 22KVA y $fp = 0,8$ conectada a la línea de distribución domiciliaria se corrige con un capacitor real como se muestra en la figura 24.

Luego de la corrección el factor de potencia pasa a valer 0,9 en atraso y la potencia aparente 20KVA, además el valor eficaz de la corriente total disminuye de 33A a 30A. Para estas condiciones se pide:

- construir el triángulo de potencias de cada rama y del circuito,
- calcular los valores de R_c y X_c de la corrección,
- construir el diagrama fasorial de corrientes, considerando como referencia una tensión genérica $V/0^\circ$.

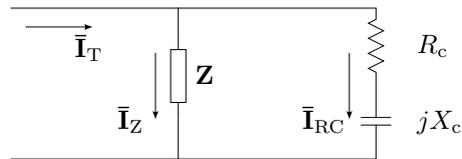


Figura 24: Potencia y factor de potencia.

Soluciones

Ejercicio 1 Solución

El fasor de tensión es

$$\bar{V}_C = \frac{10}{\sqrt{2}(\frac{1}{4} + j)} \quad (2)$$

$$\bar{V}_C = 6,86 / \underline{-75,96^\circ} \text{V} \quad (3)$$

y la respuesta en el dominio del tiempo

$$v_C(t) = 9,7 \cos(4t - 75,96^\circ) [\text{V}] \quad (4)$$

Ejercicio 2 Solución

El fasor de corriente es

$$\bar{I} = \frac{1000}{\sqrt{2} \left(1 + j100 \cdot 0,01 + \frac{1}{j100 \cdot 5 \times 10^{-6}} \right)} \quad (5)$$

$$\bar{I} = 353 \times 10^{-3} / \underline{89,97^\circ} \text{A} \quad (6)$$

y la respuesta en el dominio del tiempo

$$i(t) = 0,5 \cos(\omega t + 89,97^\circ) [\text{A}] \quad (7)$$

Ejercicio 3 Resolución Numérica

Los fasores de corriente de cada rama son

$$\bar{I}_1 = 10 / \underline{45^\circ} \text{A} \quad (8)$$

$$\bar{I}_2 = 10 / \underline{-75^\circ} \text{A} \quad (9)$$

$$\bar{I}_3 = 10 / \underline{-195^\circ} \text{A}. \quad (10)$$

según LKC, en el nudo la suma será

$$\bar{I}_T - \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0 \text{A} \quad (11)$$

$$\bar{I}_T = 10 / \underline{45^\circ} + 10 / \underline{-75^\circ} + 10 / \underline{-195^\circ} \text{A}. \quad (12)$$

Para sumar estos fasores, los escribimos en su forma binomial

$$\bar{I}_T = (7,0711 + j7,0711) + (2,5882 - j9,6593) + (-9,6593 + j2,5882) \quad (13)$$

$$\bar{I}_T = 0 \text{A}. \quad (14)$$

El resultado obtenido es lógico, pues si se observan estas corrientes tienen todas la misma amplitud y están defasadas 120° entre sí. Es decir que se trata de tres fasores simétricos que se anulan mutuamente (véase el diagrama fasorial de la figura 25). Este tipo de corrientes se obtiene por ejemplo al excitar un sistema trifásico de cargas equilibradas con una señal *simétrica*.

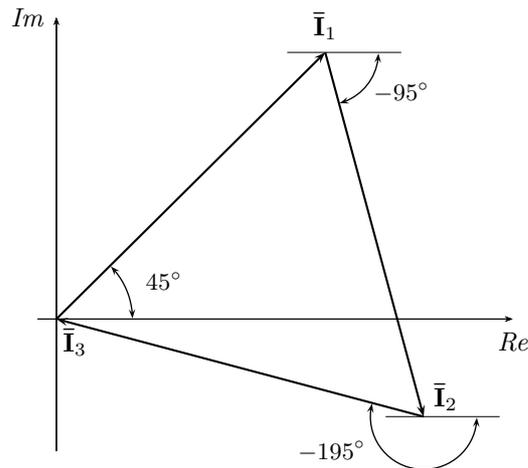


Figura 25: Diagrama fasorial de corrientes del ejercicio 3.

Ejercicio 6 Solución

$$f = 1148,6\text{Hz} \quad (15)$$

Ejercicio 8 Solución numérica

La impedancia equivalente es

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = 13,9 + j9,16\Omega, \quad (16)$$

y la corriente $\bar{\mathbf{I}}$

$$\bar{\mathbf{I}} = -8,05 - j4,03\text{A} \quad (17)$$

Para construir el diagrama fasorial de la figura 26a se calculan las tensiones en los elementos

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{R10}} = -80,54 - j40,35\text{V} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{PRL}} = -11,75 - j55,04\text{V} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{PRC}} = 17,29 - j34,52\text{V}. \quad (20)$$

Las corriente en el paralelo RL son

$$\bar{\mathbf{I}}_{RLR} = -1,17 - j5,5A \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{RL L} = 6,88 + j1,47A, \quad (22)$$

las del paralelo LC

$$\bar{\mathbf{I}}_{LC L} = -11,5 - j5,76A \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{LC C} = 3,45 + j1,73A, \quad (24)$$

el diagrama fasorial de las corrientes se muestra en la figura 26b.

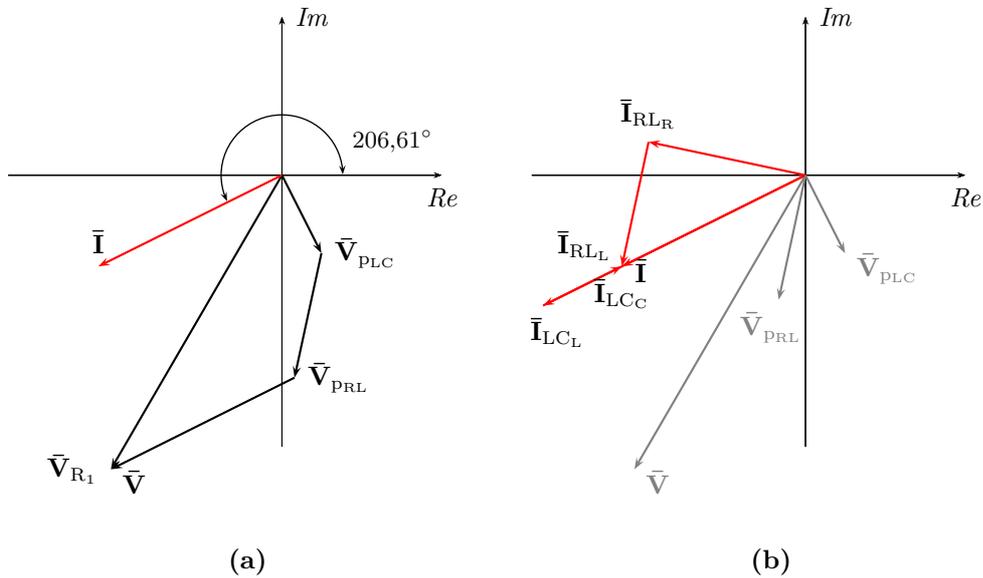


Figura 26: Diagrama fasorial de tensiones (a), y corrientes (b) del ejercicio 8.

Ejercicio 9 Planteo

Para encontrar la corriente $\bar{\mathbf{I}}_T$ buscamos primero la impedancia total equivalente del circuito.

$$\mathbf{Z}_T = R_1 + j\omega L + \left(\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} \right) = R_1 + j\omega L + \left(\frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \right) \quad (25)$$

entonces el fasor corriente será

$$\bar{\mathbf{I}}_T = \frac{\bar{\mathbf{V}}_T}{\mathbf{Z}_T}. \quad (26)$$

Con la corriente $\bar{\mathbf{I}}_T$ se pueden obtener cada una de las caídas de tensión en los elementos

$$\bar{\mathbf{V}}_{R_1} = R_1 \bar{\mathbf{I}}_T \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_L = j\omega L \bar{\mathbf{I}}_T \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}} = \bar{\mathbf{V}}_{R_2} = \bar{\mathbf{V}}_C = \left(\frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \right) \bar{\mathbf{I}}_T. \quad (29)$$

Con la tensión del paralelo se obtienen las corrientes de las ramas a y b

$$\bar{\mathbf{I}}_a = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}}}{R_2} \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_b = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}}}{\frac{1}{j\omega C}}. \quad (31)$$

Las potencias activa, reactiva y aparente serán

$$P = |\bar{\mathbf{V}}_T| \cdot |\bar{\mathbf{I}}_T| \cdot \cos(\varphi) \quad (32)$$

$$Q = |\bar{\mathbf{V}}_T| \cdot |\bar{\mathbf{I}}_T| \cdot \text{sen}(\varphi) \quad (33)$$

$$S = |\bar{\mathbf{V}}_T| \cdot |\bar{\mathbf{I}}_T|, \quad (34)$$

siendo φ , el ángulo de desfase entre la tensión y la corriente, igual al argumento de la impedancia total equivalente \mathbf{Z}_T .

Resolución numérica

El fasor eficaz de tensión correspondiente a la fuente de alimentación es

$$\bar{\mathbf{V}}_T = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 70^\circ = 35,36 \angle 70^\circ \text{ V} \quad (35)$$

y, con $\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, la impedancia total equivalente

$$\mathbf{Z}_T = 150 + j200 \cdot 500 \times 10^{-3} + \left(\frac{1}{\frac{1}{100} + j200 \cdot 60 \times 10^{-6}} \right) \quad (36)$$

$$\mathbf{Z}_T = 150 + j100 + (40,98 - j49,18) \quad (37)$$

$$\mathbf{Z}_T = 190,98 + j50,82 = 197,63 \angle 14,9^\circ \Omega \quad (38)$$

entonces el fasor corriente es

$$\bar{\mathbf{I}}_T = \frac{35,36 \angle 70^\circ}{197,63 \angle 14,9^\circ} = 0,17892 \angle 55,1^\circ \text{ A} \quad (39)$$

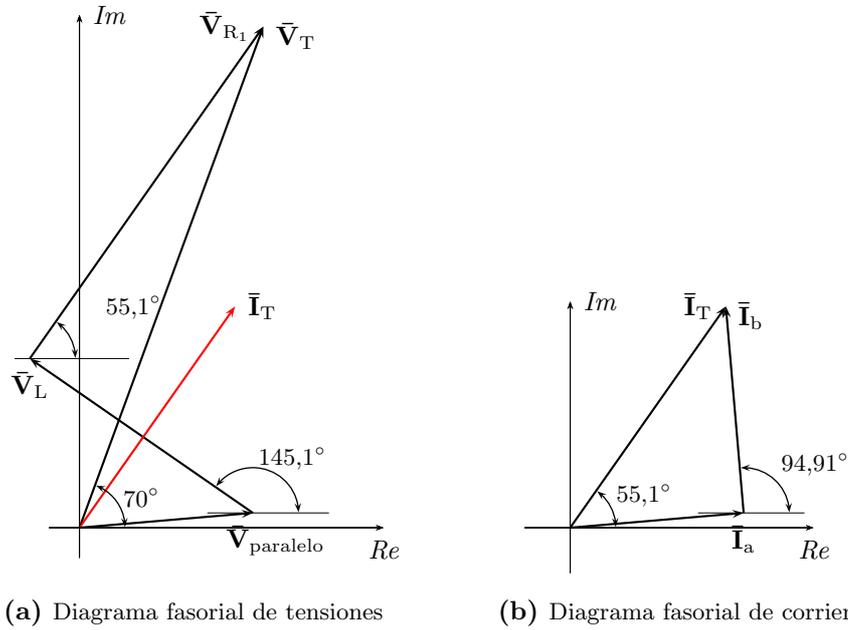


Figura 27: Diagrama fasorial de tensiones (a) y corrientes (b) del ejercicio 9.

Las tensiones en R_1 , en L y en el paralelo son

$$\bar{V}_{R_1} = 150 \cdot 0,17892 / 55,1^\circ = 26,84 / 55,1^\circ \text{V} \quad (40)$$

$$\bar{V}_L = 100 / 90^\circ \cdot 0,17892 / 55,1^\circ = 17,89 / 145,1^\circ \text{V} \quad (41)$$

$$\bar{V}_{\text{paralelo}} = 64,02 / -50,19^\circ \cdot 0,17892 / 55,1^\circ = 11,45 / 4,91^\circ \text{V}, \quad (42)$$

y finalmente las corrientes en las ramas a y b

$$\bar{I}_a = \frac{11,45 / 4,91^\circ}{100} = 0,1145 / 4,91^\circ \text{A} \quad (43)$$

$$\bar{I}_b = \frac{11,45 / 4,91^\circ}{83,33 / -90^\circ} = 0,1375 / 94,91^\circ \text{A}. \quad (44)$$

En las figuras 27a y 27b se trazan los diagramas fasoriales de tensión y corriente respectivamente.

Las potencias del circuito son

$$P = 35,36 \cdot 0,17892 \cdot \cos(70^\circ - 55,1^\circ) = 6,1139 \text{W} \quad (45)$$

$$Q = 35,36 \cdot 0,17892 \cdot \text{sen}(70^\circ - 55,1^\circ) = 1,6268 \text{VAR} \quad (46)$$

$$S = 35,36 \cdot 0,17892 = 6,33 \text{VA}. \quad (47)$$

El triángulo de potencias correspondiente se muestra en la figura 28.

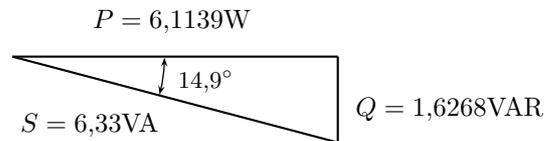


Figura 28: Triángulo de potencias del problema 9.

Ejercicio 12 Solución numérica

Los valores de los elementos L y C del circuito serie son

$$L = 20,94\text{mH} \quad (48)$$

$$C = 95,493\mu\text{F} \quad (49)$$

La corriente

$$i(t) = 447,46 \text{ sen}(1000t - 90^\circ)\text{mA} \quad (50)$$

y la tensión de excitación

$$v_{\text{in}}(t) = 10,77 \text{ sen}(1000t - 62,36^\circ)\text{V}. \quad (51)$$

Ejercicio 13 Solución

$$R_s = 2,41\Omega, \quad L_s = 12,27\text{mH} \quad (52)$$

$$R_p = 8,58\Omega, \quad L_p = 17,06\text{mH} \quad (53)$$

Ejercicio 15 Solución

$$R_1 = 7,05\Omega \quad (54)$$

Ejercicio 20 Planteo

A partir del fp del circuito se calcula el argumento φ de la impedancia \mathbf{Z}_T del circuito, y de esta la reactancia capacitiva X_C

$$\varphi = \cos^{-1}(fp) \quad (55)$$

$$\frac{X_C}{R} = \tan(\varphi) \Rightarrow X_C = R \tan(\varphi). \quad (56)$$

La frecuencia angular ω se obtiene de la relación entre X_C y C , y de aquí la frecuencia f

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi X_C C}. \quad (57)$$

El valor eficaz de la corriente y la resistencia determinan la potencia activa

$$P = I_{\text{ef}}^2 R, \quad (58)$$

por lo tanto

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{P}{R}}. \quad (59)$$

El módulo del fasor tensión total aplicado V_{ef} puede calcularse a partir de los módulos de los fasores de tensión del capacitor y la resistencia

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{(RI_{\text{ef}})^2 + (X_C I_{\text{ef}})^2}. \quad (60)$$

Para construir el diagrama fasorial se deben calcular los fasores de tensión y corriente total, el fasor $\bar{\mathbf{V}}_T$ será

$$\bar{\mathbf{V}}_T = V_{\text{ef}} \angle 0^\circ, \quad (61)$$

y el de corriente

$$\bar{\mathbf{I}}_T = I_{\text{ef}} \angle -\varphi. \quad (62)$$

Las tensiones en los elementos serán

$$\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}}_T, \quad (63)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_C = -jX_C\bar{\mathbf{I}}_T. \quad (64)$$

Resolución numérica

Reemplazando los valores de resistencia, capacidad y factor de potencia según los datos

$$\varphi = \cos^{-1}(0,334) = -70,5^\circ \quad (65)$$

$$X_C = 2 \tan(-70,5^\circ) = 5,64\Omega. \quad (66)$$

Obsérvese que de los dos valores de ángulo que se obtienen del cálculo del \cos^{-1} (uno positivo y otro negativo) se toma el ángulo negativo por tratarse de una impedancia capacitiva.

La frecuencia f es

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot 5,64 \cdot 470 \times 10^{-6}} = 60\text{Hz}, \quad (67)$$

la corriente eficaz

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{7200}{2}} = 60\text{A}, \quad (68)$$

y la tensión eficaz

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{(2 \cdot 60)^2 + (5,64 \cdot 60)^2} = 359,26\text{V}. \quad (69)$$

Por último se calculan los fasores para construir el diagrama fasorial de la figura 29

$$\bar{\mathbf{I}}_T = 60/70,5^\circ \text{A}, \quad (70)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_T = 359,26/0^\circ \text{V}, \quad (71)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_R = 2 \cdot 60/70,5^\circ = 120/70,5^\circ \text{V}, \quad (72)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_C = -j5,64 \cdot 60/70,5^\circ = 338,4/-19,5^\circ \text{V}. \quad (73)$$

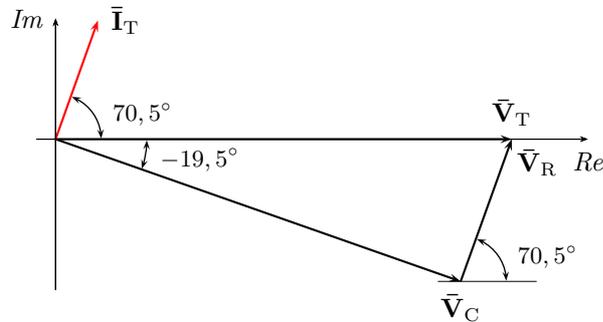


Figura 29: Diagrama fasorial de tensiones del ejercicio 20.

Ejercicio 21 Planteo

- a. La solución se obtiene de aplicar la LKV al circuito serie

$$\bar{\mathbf{V}}_T = \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L + \bar{\mathbf{V}}_C, \quad (74)$$

pero como se tienen sólo los módulos de las caídas de tensión como dato, entonces se debe resolver trigonométricamente. Como se sabe que las

caídas en los elementos reactivos están desfasadas 180° entre sí, se puede encontrar el módulo de la caída de tensión en ambos elementos simplemente por diferencia de sus módulos. Si llamamos a esta tensión \bar{V}_X , su módulo será

$$V_X = V_L - V_C. \quad (75)$$

Además, se sabe que esta tensión en los elementos reactivos tiene una diferencia de fase de 90° respecto de la caída de tensión resistiva, y con la tensión total aplicada se forma un triángulo rectángulo. Teniendo entonces los módulos de la tensión total y de la tensión en los elementos reactivos, se obtiene el ángulo φ

$$\varphi = \text{sen}^{-1} \left(\frac{V_X}{V_T} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\frac{V_L - V_C}{V_T} \right). \quad (76)$$

Como no se conoce ningún ángulo de fase de los fasores de tensión, se puede considerar que la caída de tensión resistiva tiene una fase cero, por lo que también tendrá fase nula la corriente total, lo que facilita mucho el cálculo. Entonces, si \bar{V}_R tiene fase cero, \bar{V}_L como \bar{V}_C tendrán fase 90° y -90° respectivamente, y el fasor V_T se obtiene con la (74)

$$\bar{V}_R = V_R \angle 0^\circ \quad (77)$$

$$\bar{V}_L = V_L \angle 90^\circ \quad (78)$$

$$\bar{V}_C = V_C \angle -90^\circ. \quad (79)$$

La corriente total se obtiene de la caída de tensión en la resistencia

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{V}_R}{R}. \quad (80)$$

b. Para construir el triángulo de potencias se calcula la potencia compleja \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \bar{V}_T \bar{I}_T^*, \quad (81)$$

de donde

$$P = \text{Re}\{\mathbf{S}\} \quad (82)$$

$$Q = \text{Im}\{\mathbf{S}\} \quad (83)$$

$$S = |\mathbf{S}|. \quad (84)$$

c. Considerando nuevamente a la tensión en la resistencia con fase cero, según el nuevo factor de potencia la tensión aplicada será

$$\bar{V}_{T2} = V_T \angle \varphi, \quad (85)$$

y la tensión en la resistencia

$$\bar{V}_{R2} = V_T \cos(\varphi), \quad (86)$$

por ende el fasor corriente

$$\bar{I}_{T2} = \frac{V_R}{R} \angle 0^\circ. \quad (87)$$

Finalmente la nueva potencia compleja y las potencias activas, reactivas y aparente se obtienen de

$$\mathbf{S}_2 = \bar{V}_{T2} \bar{I}_{T2}^* \quad (88)$$

$$P_2 = \text{Re}\{\mathbf{S}\} \quad (89)$$

$$Q_2 = \text{Im}\{\mathbf{S}\} \quad (90)$$

$$S_2 = |\mathbf{S}_2|. \quad (91)$$

Resolución numérica

El siguiente código de Octave permite obtener la resolución numérica de este problema. Para obtenerlo copiar el código en un archivo `resolv.m` y ejecutar en una terminal `$ octave resolv.m`.

```
% Declaracion de constantes conocidas
R = 10;
mod_V_T = 220;
mod_V_L = 438.2;
mod_V_C = 220;
cos_phi2 = 0.95

% Cálculo de phi en radianes.
phi = asin( (mod_V_L - mod_V_C) / mod_V_T );

% Cálculo del módulo V_R. Se deja sin ; para que
% se muestre el valor por pantalla
mod_V_R = mod_V_T * cos( phi )

% Se calculan V_R, V_L, V_C y V_T, considerando a V_R con fase cero
V_R = mod_V_R
V_L = mod_V_L * i
V_C = mod_V_C * (-i)
V_T = mod_V_R + ( mod_V_L - mod_V_C ) * i

% Muestra de V_{T} en forma polar
```

```
% módulo
abs( V_T )
% y argumento
arg( V_T ) * 180/pi

% Cálculo de la corriente
I_T = V_R / R
% en forma polar, módulo
abs( I_T )
% y argumento
arg( I_T ) * 180/pi

% Cálculo de la potencia compleja S
S_compleja = V_T * conj( I_T )
P = real( S_compleja )
Q = imag( S_compleja )
S = abs ( S_compleja )

% el factor de potencia
cos_phi = P / S

% Cálculo del nuevo phi2
phi2 = acos( cos_phi )

% Nueva caída de tensión en R, considerando su fase cero
V_R2 = mod_V_T * cos_phi2

% Nueva corriente
I_T2 = V_R2 / R

% Nueva tensión V_T2
V_{T}2 = mod_V_T * ( cos( phi2 ) + sin( phi2 ) * i )
% Muestra de V_T2 en forma polar
% módulo
abs( V_T2 )
% y argumento
arg( V_T2 ) * 180/pi

% Nueva potencia compleja, y potencias activa, reactiva y aparente
S_compleja2 = V_T2 * conj( I_T2 )
P2 = real( S_compleja2 )
Q2 = imag( S_compleja2 )
S2 = abs ( S_compleja2 )
```

Ejercicio 22 Planteo y resolución numérica

La suma de las tensiones a lo largo de la malla es

$$v_T(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (92)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_T = \bar{\mathbf{V}}_1 + \bar{\mathbf{V}}_2 \quad (93)$$

de donde

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \bar{\mathbf{V}}_T - \bar{\mathbf{V}}_2 \quad (94)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = (11,5846 - j8,1116) - (6,3836 + j21,4133) = 5,2010 - j29,5249V \quad (95)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = 29,98 / \underline{-80,01^\circ}V. \quad (96)$$

Las tensiones medidas por un voltímetro a bornes de cada impedancia serán los módulos de los fasores eficaces

$$V_1 = 29,98V \quad (97)$$

$$V_2 = 22,35V \quad (98)$$

$$V_T = 14,14V. \quad (99)$$

Con los fasores obtenidos se construye el diagrama fasorial de la figura 30.

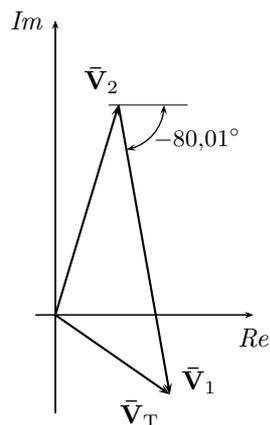


Figura 30: Diagrama fasorial de tensiones del ejercicio 22.

Para construir el triángulo de potencias se puede calcular la corriente total

$$\bar{\mathbf{I}}_T = \frac{\bar{\mathbf{V}}_T}{\mathbf{Z}_T} \quad (100)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_T = \frac{11,5846 - j8,1116}{1 + j2} = -0,92773 - j6,25614A \quad (101)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_T = 6,32/\underline{-98,43^\circ}[A] \quad (102)$$

de donde

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{I}}_T^* \quad (103)$$

$$\mathbf{S} = (11,5846 - j8,1116) \cdot (-0,92773 + j6,25614) \quad (104)$$

$$\mathbf{S} = 40 + j80, \quad (105)$$

es decir, la potencia activa $P = 40W$, la potencia reactiva $Q = 80VAR$ y la potencia aparente $S = 89,44VA$. El factor de potencia del sistema es

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0,4471 \quad (106)$$

en retraso.

En la figura 31 se construye el triángulo de las potencias correspondiente.

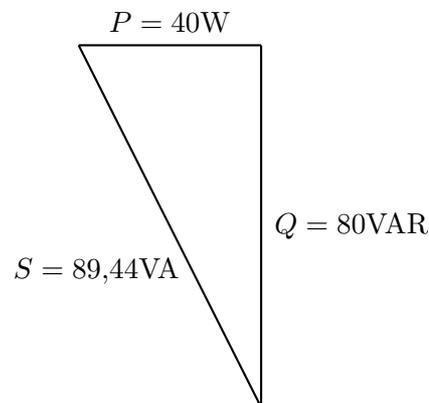


Figura 31: Triángulo de potencias del ejercicio 22.

Ejercicio 31 Solución numérica

La tensión $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$ es

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} = 12,02/\underline{56,31^\circ}V. \quad (107)$$

En la figura 32a se muestra el diagrama fasorial completo de tensiones y corrientes, y se indica la tensión \bar{V}_{AB} . El circuito es de carácter inductivo por lo tanto la corriente \bar{I} atrasa a la tensión aplicada \bar{V} .

En la figura 32b se muestra un detalle de las tensiones en los elementos que forman el paralelo. En este diagrama puede verse como la tensión \bar{V}_{L_2} adelanta 90° a la corriente \bar{I}_1 , de modo que $\bar{V}_{L_2} = \bar{V}_{\text{paralelo}}$, y que en la rama RC la tensión en la resistencia R_2 está en fase con la corriente \bar{I}_2 mientras que la tensión en C_1 atrasa 90° respecto de la misma corriente \bar{I}_2 . En esta última rama se ve también que $\bar{V}_{R_2} + \bar{V}_{C_1} = \bar{V}_{\text{paralelo}}$.

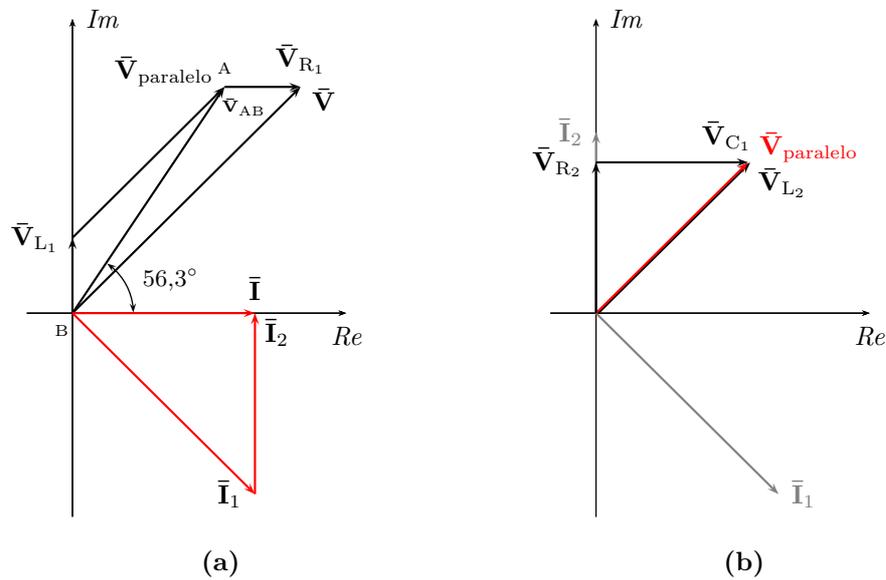


Figura 32: Diagrama fasorial de tensiones y corrientes (a), y detalle de las tensiones del paralelo (b) del ejercicio 31.

La potencia compleja \mathbf{S} del circuito es

$$\mathbf{S} = \bar{V}\bar{I}^* = 16,667 + j16,667 \quad (108)$$

por lo que

$$P = 16,667\text{W} \quad (109)$$

$$Q = 16,667\text{VAR} \quad (110)$$

$$S = 23,57\text{VA}. \quad (111)$$

Finalmente, la potencia activa en los resistores R_1 y R_2 será

$$P_{R_1} = (1,667)^2 \cdot 2 = 5,55\text{W} \quad (112)$$

$$P_{R_2} = (1,667)^2 \cdot 4 = 11,11\text{W}, \quad (113)$$

verificando que $P = P_{R_1} + P_{R_2}$.

En la figura 33 se muestra el triángulo de potencias del circuito en atraso del ejercicio 31.

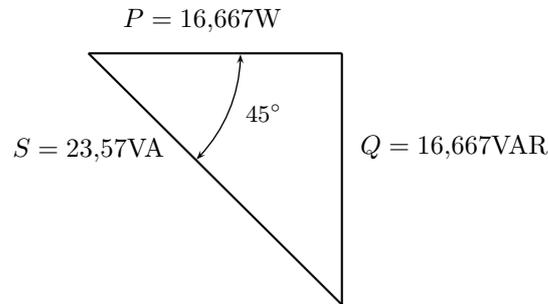


Figura 33: Triángulo de potencias del ejercicio 31.

Ejercicio 32 Planteo

La potencia total consumida por el motor está dada por

$$P = |\bar{\mathbf{V}}||\bar{\mathbf{I}}| \cos \varphi \quad (114)$$

por lo tanto

$$|\bar{\mathbf{I}}| = \frac{P}{|\bar{\mathbf{V}}| \cos \varphi} \quad (115)$$

luego el fasor de corriente será

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{P}{|\bar{\mathbf{V}}| \cos \varphi} \angle \varphi. \quad (116)$$

Para determinar la resistencia de pérdida e impedancia de magnetización se calcula primero la tensión sobre el paralelo

$$\bar{\mathbf{V}}_p = \bar{\mathbf{V}} - \mathbf{Z}_e \bar{\mathbf{I}} \quad (117)$$

para lo cual se considera que la fase inicial del fasor tensión aplicada es cero, es decir $\bar{\mathbf{V}} = 220/\underline{0^\circ}$. Luego,

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Y}_{M-c} + \mathbf{Y}_r) \quad (118)$$

$$\mathbf{Y}_{M-c} = \frac{\bar{\mathbf{I}}}{\bar{\mathbf{V}}} - \mathbf{Y}_r, \quad (119)$$

donde $\mathbf{Y}_{M-c} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{jX_M}$ y $\mathbf{Y}_r = \frac{1}{Z_r}$.

Conocido el valor de R_c se determina la potencia de pérdida en el hierro

$$P_c = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_p|^2}{R_c}. \quad (120)$$

Para determinar la potencia reactiva necesaria para el nuevo factor de potencia se calcula primero la potencia reactiva actual (o inicial)

$$Q_i = P \tan(\varphi), \quad (121)$$

y la potencia aparente correspondiente al nuevo f.p. ($\cos(\varphi_f)$), sabiendo que la potencia activa no cambia con la corrección

$$S_f = \frac{P}{\cos(\varphi_f)}. \quad (122)$$

Luego la potencia reactiva final será

$$Q_f = S_f \sin(\varphi_f), \quad (123)$$

de donde

$$Q_C = Q_i - Q_f. \quad (124)$$

Resolución numérica

$$\bar{\mathbf{I}} = 113,636 - j94,162 = 147,58/39,65^\circ \text{A} \quad (125)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_p = 144,349 + j24,354 = 146,39/9,57^\circ \text{V} \quad (126)$$

$$\mathbf{Y}_{M-c} = 0,52622 - j0,60034\text{S} \quad (127)$$

$$R_c = 1,9\Omega \quad (128)$$

$$X_M = 1,66\Omega \quad (129)$$

$$P_c = 11,27\text{KW} \quad (130)$$

$$Q_C = 20716 - 12108 = 8608\text{VAR}. \quad (131)$$