



Mecánica Técnica

para estudiantes de
Ingeniería Eléctrica

Martín Alejo PUCHETA

Copyright © 2018-2023 Martín Pucheta

Este trabajo se realizó con el financiamiento de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba y el apoyo del CONICET.

Primera edición, Marzo del 2018. Cuarta edición, Abril del 2023



Prefacio

El propósito de este libro es compilar un conjunto de elementos para que el estudiante de ingeniería eléctrica construya conocimientos de mecánica que le serán necesarios para cumplir su rol profesional como ingeniero.

Los esfuerzos de esta compilación tienen importantes créditos en un profesor anterior de la cátedra de Mecánica Técnica, el ingeniero Ramón Solowey, actualmente jubilado.

Si bien este libro está orientado a alumnos del segundo año de la carrera de ingeniería eléctrica de la UTN FRC, se espera que sea de utilidad a otros alumnos e ingenieros.

Dedicado a Máximo y Mateo



Tabla de Contenidos

1	Introducción a la dinámica	9
1.1	Generalidades	9
1.2	Tipos de movimientos de un cuerpo rígido	10
1.3	Grados de libertad de cuerpos rígidos vinculados	11
2	Traslación rectilínea del punto	15
2.1	Posición, velocidad y aceleración unidimensional	15
2.1.1	Problemas directo e inverso	17
2.2	Movimiento rectilíneo variado, uniforme y uniformemente acelerado	17
2.2.1	Movimiento rectilíneo variado	17
2.2.2	Movimiento rectilíneo uniforme	17
2.2.3	Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	18
2.2.4	Movimiento rectilíneo variado en función de la posición	18
2.2.5	Movimiento rectilíneo variado en función de la velocidad	19
2.3	Resolución simbólica, numérica y gráfica	19
3	Traslación curvilínea del punto	21
3.1	Sistemas de coordenadas	21
3.1.1	Coordenada vectorial	22
3.2	Vectores	24
3.2.1	Vectores naturales	24
3.2.2	Vectores Cartesianos	24
3.2.3	Vectores de otros sistemas coordenados	25
3.3	Vectores posición, velocidad y aceleración	26
3.3.1	Vector aceleración en 3D	27

3.4	Derivadas temporales importantes	28
3.5	Componentes tangencial y normal de la aceleración	28
3.6	Componentes Cartesianas de la posición, velocidad y aceleración	30
3.7	Componentes polares de la velocidad y la aceleración	31
3.7.1	Movimiento angular de una partícula	33
4	Cinética del punto	34
4.1	Principios y leyes de la dinámica	34
4.1.1	Ecuación vectorial del movimiento	35
4.1.2	Fuerzas de acción y reacción. Fuerza de inercia.	35
4.2	Sistemas de unidades Absoluto y Gravitatorio.	36
4.2.1	Sistema Internacional de Unidades (SI), Métrico, o Absoluto (MKS)	36
4.2.2	Sistema Imperial (SU), Inglés o gravitacional	36
4.3	Ecuaciones escalares del movimiento	37
4.3.1	Fuerzas activas y reactivas	38
4.3.2	Diagrama de cuerpo libre (DCL)	40
5	Leyes de la cinética en la traslación	41
5.1	Ley de impulso y cantidad de movimiento	41
5.1.1	Cálculo del impulso de una fuerza	42
5.1.2	Ecuaciones escalares	42
5.2	Ley de trabajo y energía cinética	43
5.2.1	Trabajo finito y unidades del trabajo	43
5.3	Potencia en la traslación	46
5.3.1	Unidades de potencia	46
5.3.2	Trabajo de las fuerzas conservativas	47
5.3.3	Fuerzas no conservativas	50
5.3.4	Conservación de la energía mecánica	51
5.3.5	Eficiencia	51
5.4	Principio de d'Alembert aplicado a una partícula.	52
6	Movimientos relativos	53
6.1	Movimiento relativo en traslación	53
6.1.1	Posición relativa	54
6.1.2	Desplazamiento relativo	54
6.1.3	Velocidad relativa	55
6.1.4	Aceleración relativa	55
6.2	Movimiento rectilíneo de partículas vinculadas	55
6.3	Ejemplo de transporte de carga de un grado de libertad.	58
6.3.1	Resolución de la cinemática de sistemas de poleas	58
6.4	Movimiento de partículas sobre trayectorias curvilíneas.	60
6.5	(*) Movimiento relativo de partículas en marco móvil rotante	61

7	Sistemas de partículas	64
7.1	Movimiento de un Sistema de Partículas	64
7.1.1	Fuerzas externas, internas y efectivas	64
7.1.2	Centro de masa	66
7.1.3	Momentum lineal y angular de un sistema de partículas	67
7.2	Ley de impulso y cantidad de movimiento lineal para un sistema	68
7.2.1	Conservación de la cantidad de movimiento lineal en un sistema	69
7.3	Ley de impulso y cantidad de movimiento angular para un sistema	69
7.3.1	Conservación de la cantidad de movimiento angular en un sistema	70
7.4	Ley de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas	70
7.4.1	Conservación de la energía mecánica para un sistema de partículas	71
8	Fenómenos Percusivos	73
8.1	Clasificación de los fenómenos percusivos	73
8.2	Choque entre dos partículas	74
8.3	Coeficiente de restitución	74
8.4	Choque oblicuo	77
8.5	Lecturas sugeridas	77
9	Cinemática de cuerpos rígidos	78
9.1	Cinemática de la rotación con eje fijo	78
9.1.1	Posición, velocidad y aceleración angular	79
9.1.2	Similitud con el movimiento de traslación rectilíneo	80
9.1.3	Rotación uniforme y uniformemente acelerada	81
9.2	Rotación con eje fijo: Movimiento de un punto del cuerpo	82
9.2.1	Rotación de una placa	83
9.2.2	Conversión de componentes naturales a componentes cartesianas	84
10	Cinética de la rotación con eje fijo	86
10.1	Ecuaciones vectoriales del movimiento	86
10.1.1	Ecuaciones escalares, rotación con eje fijo	87
10.2	Propiedades inerciales de un cuerpo rígido	87
10.2.1	Problemas directo e inverso	88
10.2.2	Radio de giro. Cambio de ejes	88
10.2.3	Productos de inercia, elipsoide de inercia y ejes principales	89
10.3	Cargas exteriores en la rotación con eje fijo	92
10.3.1	Aplicación a máquinas eléctricas	92
10.4	Efectos de las reacciones estáticas y dinámicas en la rotación	93
10.4.1	Desequilibrio en cuerpos que rotan con eje fijo	95
10.4.2	Equilibrado estático y dinámico	95

11	Más leyes en la rotación	98
11.1	Ley de impulso y cantidad de movimiento para un cuerpo rígido	98
11.1.1	Unidades y cálculo del impulso angular	99
11.2	Ley de trabajo y energía cinética en la rotación	99
11.3	Potencia en la rotación	100
11.4	Conservación de la energía, eficiencia y disipación	100
11.4.1	Eficiencia y frenos dinamométricos	101
12	Oscilaciones mecánicas	102
12.1	Representación de vibraciones	103
12.1.1	Oscilaciones armónicas	104
12.2	Péndulo simple (solución aproximada).	105
12.3	Vibraciones torsionales	108
12.4	Vibración libre de traslación de un cuerpo con vínculo elástico	109
12.4.1	Rigidez equivalente	111
13	Vibraciones amortiguadas	114
13.1	Vibración libre con amortiguación viscosa	114
13.1.1	Categorías de movimiento amortiguado	116
13.1.2	Determinación experimental del coeficiente de resistencia	118
13.2	Vibración forzada	118
13.2.1	Vibración forzada por fuerza excitadora	118
13.2.2	Vibración forzada por desplazamiento excitador	119
13.3	Solución de la ecuación diferencial ordinaria	119
13.3.1	Vibración forzada: Solución de la no amortiguada	120
13.3.2	Vibración por desbalanceo de un rotor no amortiguado	121
13.3.3	Vibración forzada con amortiguación viscosa	122
13.4	Fuerzas transmitidas, control y aislamiento de vibraciones	124
13.5	Aislamiento de oscilaciones	125
13.6	Aislamiento de oscilaciones en fundación de máquinas e instrumentos eléctricos	127
13.7	Oscilaciones eólicas en líneas de transmisión eléctrica.	128
13.8	Absorbedores dinámicos	130
13.8.1	Recolectores de energía del movimiento	133
14	Sistemas electromecánicos	135
14.1	Sistemas mecánicos en traslación y rotación	135
14.2	Sistemas eléctricos	136
14.2.1	Circuito RLC serie oscilante libre	136
14.2.2	Circuito RLC serie de corriente alterna	136

14.3	Analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos	137
14.4	Conceptos generales sobre el modelado y simulación de sistemas electromecánicos	137
14.5	Introducción al Método de Lagrange	138
14.5.1	Ejemplo mecánico	138
14.5.2	Ejemplo eléctrico	139
14.6	Modelado de sistemas electromecánicos	140
14.6.1	Motor de corriente continua	140
14.7	Modelado de sistemas dinámicos	143
14.7.1	Modelado con Diagramas de Enlaces	145
14.7.2	Modelado con dominio en frecuencia	150

1. Introducción a la dinámica

1.1 Generalidades

La *mecánica* es la parte de la física que estudia el estado de los objetos físicos en *tiempo* y *espacio*, y las influencias que otros objetos tienen sobre dicho estado. A su vez, la mecánica tiene muchas divisiones: clásica, relativista, cuántica, etc. Nos restringiremos a estudiar la mecánica clásica en donde los objetos físicos son cuerpos rígidos y están sujetos a la acción de fuerzas e incorporaremos algún concepto de termodinámica y electromagnetismo. Entre otras posibles divisiones de la mecánica clásica, podemos mencionar dos que son de base:

1. **Estática:** Estudia las características del estado de *equilibrio* de los cuerpos y su relación con las condiciones que lo determinan (desde época de filósofos Griegos)
2. **Dinámica:** Estudia las características del estado de movimiento de los cuerpos y las condiciones que lo determinan (Galileo, Newton,...)

La dinámica, a su vez, se divide en:

1. **Cinemática:** Estudia la geometría del movimiento, relacionando posición (desplazamiento), velocidad, aceleración, y tiempo, *sin tener en cuenta las causas del movimiento*.
2. **Cinética:** Estudia la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, la masa y su distribución, y el movimiento del mismo.



Figura 1.1: Un problema típico de la dinámica es determinar el movimiento de un *objeto* debido a las fuerzas y momentos que actúan, y el converso es determinar las fuerzas y momentos necesarias para producir un movimiento, por ejemplo, el de la antena que se muestra.

Para estudiar la flexibilidad de los cuerpos, se recurre a la mecánica de medios continuos. En este curso, consideraremos a todos los cuerpos como rígidos, permitiendo también el empleo de vínculos y acciones generadas por medios elásticos. Entonces definimos:

Cuerpo rígido (CR): es un sólido *ideal* indeformable, es decir, donde la distancia entre dos puntos cualquiera del mismo no cambia. El cuerpo rígido puede trasladarse y rotar.

Partícula o punto: es un cuerpo rígido que contiene materia e independientemente de su forma y tamaño (molécula, cohete, etc) tiene un movimiento de *rotación despreciable*.

En orden de complejidad, en este curso se estudia la dinámica de:

- Partículas (con determinada masa y sin inercia),
- Sistemas de partículas,
- Cuerpo rígido (con masa e inercia),
- Sistemas de cuerpos rígidos, vinculados por pares cinemáticos, y
- Sistemas electromecánicos.

1.2 Tipos de movimientos de un cuerpo rígido

Los movimientos que puede tener un cuerpo rígido [BJC10, Cap. 15] se clasifican en *movimientos simples*

1. **Traslación (pura):** Movimiento durante el cual, cualquier línea recta que une dos puntos del CR permanece en la misma dirección. Los puntos pueden tener trayectorias rectas ó curvas, paralelas entre sí.
2. **Rotación (pura):** Las partículas del CR se mueven en planos paralelos sobre circunferencias con centro en un eje. Las partículas sobre el eje tienen velocidad y aceleración nulas.

y en *movimientos compuestos*, que se clasifican como

1. **Movimiento general en un plano:** Todas las partículas del CR se mueven en planos paralelos. No es ni rotación pura ni traslación pura, pero se puede descomponer el movimiento en una traslación seguida de rotación y viceversa.
2. **Movimiento alrededor de un punto fijo:** Movimiento tridimensional de un CR unido a un punto fijo O . Un ejemplo es el trompo (con distribución de masa especial) girando sobre un piso rugoso.
3. **Movimiento general:** Movimiento que no cae en las categorías anteriores (manipulador robótico, brazo humano, avión, etc).

El Teorema de Euler enuncia que la rotación espacial o tridimensional puede concebirse como el giro de un cuerpo alrededor de un único eje (denominado eje de Euler), de orientación definida, alrededor del cual se mide un ángulo de giro. En las aplicaciones de ingeniería eléctrica que veremos en este curso consideraremos que este eje permanece fijo.

El Teorema de Chasles enuncia que todo movimiento tridimensional finito se puede descomponer como una traslación pura a lo largo de un eje invariante seguida de una rotación pura alrededor del mismo eje y viceversa.

El espacio en donde se mueven los cuerpos puede tener dimensiones que van desde 1 (unidimensional) hasta 6 dimensiones, y se lo caracteriza por un parámetro de movimiento, λ , con valores:

- $\lambda = 3$ cuando tiene 3 dimensiones. Por ejemplo, el movimiento *plano*, consiste de 2 traslaciones paralelas a un plano y 1 rotación alrededor de un eje perpendicular al plano. También corresponde al movimiento *esférico* en donde las 2 traslaciones suceden en superficies esféricas concéntricas y la rotación es alrededor de ejes que pasan por el centro de la esfera.
- $\lambda = 6$ son las 3 traslaciones y 3 rotaciones en el *espacio*. Por ejemplo, el de un vehículo aéreo.

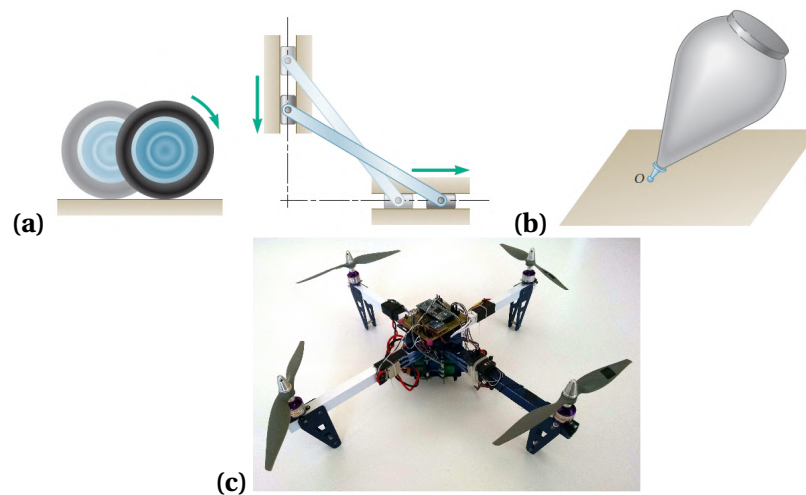


Figura 1.2: Ejemplos de movimientos: (a) plano general, (b) a punto fijo, y (c) espacial general.

1.3 Grados de libertad de cuerpos rígidos vinculados

Los cuerpos rígidos se combinan y vinculan entre sí para obtener movimientos variados en puntos de interés. Los *pares cinemáticos* son vínculos que conectan dos cuerpos permitiendo movimiento relativo en algunas direcciones y lo restringen en otras. Según Franz Reuleaux (1876) [Reu76] se clasifican en:

- Los pares cinemáticos *bajos* poseen contacto entre superficies.
- Los pares cinemáticos *altos* poseen contacto en una curva, en una línea o en un simple punto. Ejs.: Engranajes, conos, cilindros, levas, esferas, etc.

El par de Hooke (**U**niversal) consiste de dos pares rotoidales con ejes a 90°.

Tabla 1.1: Grados de libertad (GDL) de pares cinemáticos frecuentemente usados

Par	Símbolo	GDL	Rotacional	Traslacional
Rotoidal	R	1	1	0
Prismática	P	1	0	1
Cilíndrica	C	2	1	1
Helicoidal	H	1	1	acoplado
Esférica	S	3	3	0
Engranaje	G	2	1	1
Leva	C_p	2	1	1

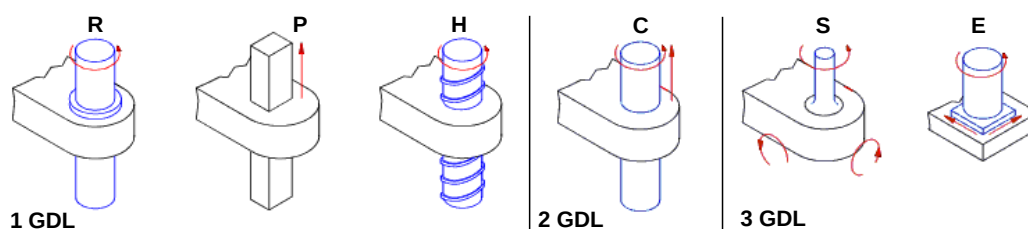


Figura 1.3: Pares cinemáticos bajos que permiten 1, 2 y 3 grados de libertad

El *grado de libertad* (GDL) de un ensamblaje de cuerpos o movilidad M de un mecanismo,

depende en primer lugar, del espacio en donde se mueven los cuerpos de interés (en un plano o en esferas concéntricas $\lambda = 3$, en el espacio 3D $\lambda = 6$), en segundo lugar, depende de la conexión entre los cuerpos y de los tipos de conexiones cinemáticas. Para el cálculo de la movilidad, primero asumimos que tenemos n cuerpos libres; sus grados de libertad son λn . Como uno de los cuerpos es la fundación o cuerpo fijo y los cuerpos restantes tienen algún movimiento relativo al mismo, los grados de libertad totales se reducen a $\lambda(n - 1)$. Estas libertades se ven reducidas por las restricciones. Un par cinemático i permite f_i grados de libertad, según la Tabla 1.1, y restringe $\lambda - f_i$ grados. Si n cuerpos se vinculan apropiadamente a j pares cinemáticos, la fórmula de *Chebichev-Grübler-Kutzbach* (CGK) predice a los grados de libertad para el mecanismo o robot como la diferencia entre los GDL's libres y los restringidos

$$\begin{aligned}
 M &= \lambda(n - 1) - \sum_{i=1}^j (\lambda - f_i) \\
 &= \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Un ensamblaje puede tener movilidad nula y formar una estructura, como el triángulo articulado que se utiliza en estructuras reticuladas. Además, esta ecuación es inválida en casos geométricos especiales que han dado lugar a muchos mecanismos útiles denominados sobrerestringidos.

Entre los casos en que la fórmula CGK es válida, puede mencionarse

- Ej.1: Mecanismo de 4 barras plano con 4 uniones rotoidales, también conocido como cuadrilátero articulado. Se tiene $\lambda = 3$, $n = 4$, $j = 4$, donde cada unión restringe $(3 - 1) = 2$ GDL.

$$M = 3(4 - 1) - 4[(3 - 1)] = 9 - 8 = 1\text{GDL}$$

- Ej.2: Plataforma espacial de Stewart-Gough. Posee 2 plataformas, una es fija. Están vinculadas por 6 extremidades (patas) de dos cuerpos cada una con uniones U(2R)-P-S. Luego, $\lambda = 6$, $n = 14$, $j = 24$

$$\begin{aligned}
 M &= 6(14 - 1) - 6[(6 - 2) + (6 - 1) + (6 - 3)] \\
 &= 6 \cdot 13 - 6[4 + 5 + 3] = 6 \cdot 13 - 6 \cdot 12 = 6\text{GDL}
 \end{aligned}$$

- Ej.3: Plataforma 6 GDLs con extremidad U-C-U tiene $2+2+2=6$ GDL está actuada en el cilindro. Hay muchas otras combinaciones...

Si bien la ecuación de los grados de libertad de estos mecanismos es simple, *la cinemática, la dinámica y su control* son muy complejos. Por ejemplo, una vez elegida la conectividad de los cuerpos se desea que un punto de uno de los cuerpos pase por una trayectoria, se mueva en un área, o en un volumen predefinido. Las estructuras de las plataformas paralelas como la de Stewart Gough (Fig. 1.3) se destacan por sus ventajas de rigidez, robustez y precisión. A pesar de tener un volumen útil pequeño en relación a su tamaño (cuando se los compara con robots de cadena abierta), se los aplica a robots de cirugía, simuladores de manejo, máquinas de mecanizado de alta velocidad, etc.

En motores de combustión interna, el mecanismo biela manivela que transforma un movimiento de traslación pura en uno de rotación. La expansión de la combustión de un gas en una presión sobre un cilindro produciendo una fuerza neta que traslada al pistón, cuya traslación pura se convierte a través de la manivela en una rotación pura de la manivela que forma parte de un árbol o cigueñal.

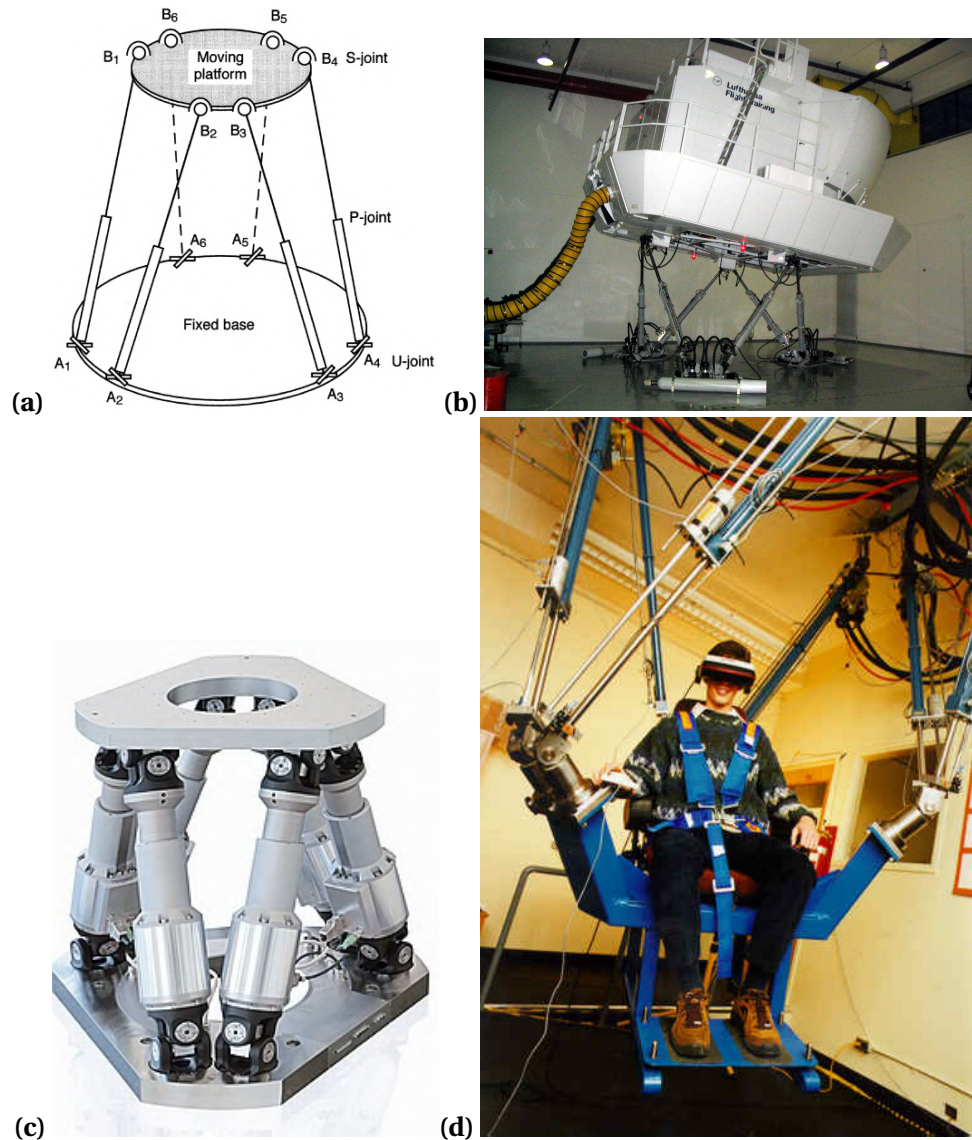


Figura 1.4: La plataforma de Stewart-Gough esquematizada en (a) tiene aplicación en: (b) simuladores de vuelo, (c) como posicionador de precisión, y (d) puede montarse con base fija sujeta a un techo.

Anterior a los motores de combustión interna, se utilizaban máquinas de vapor o de combustión externa, donde el vapor era generado mediante calderas calentadas a carbón y accionaba émbolos de movimiento rectilíneo oscilante; el desafío de diseño era convertir a la traslación pura del émbolo en movimiento rotativo puro, ello dio lugar a los mecanismos de Watt y de Stephenson que fueron protagonistas de la Revolución Industrial, un hito económico mundial. Los motores de combustión interna fueron superiores en potencia y compactidad. Debido a la confiabilidad de los sellos entre el cilindro y pistón, no han podido ser reemplazados por los motores rotativos tipo Wankel.

En la opinión del autor, los avances producidos por los motores de combustión externa e interna, ambos utilizando combustibles fósiles, no han sido tan significativos como los que produjo el aprovechamiento de la energía eléctrica y el uso de energías renovables. En nuestro país, cohesisten las locomotoras diesel-eléctricas FIAT, Materfer (Córdoba), General Motors,

General Electric y China North Locomotive [Bil18], en donde existe un acoplamiento entre un motor Diésel y un generador eléctrico de corriente alterna que es rectificadora a continua y alimenta diversos motores eléctricos de tracción [Mat18]. Las locomotoras eléctricas se benefician de la alta eficiencia de los motores eléctricos, de frenos regenerativos, y de que producen baja contaminación. Además, en muchos lugares del mundo la energía eléctrica que las alimenta es producida por fuentes renovables y las toman de un conductor de tendido eléctrico exterior a la locomotora.

Estos últimos preliminares de carácter informativo se volverán a ver en el transcurso del dictado, vinculan a la mecánica y los mecanismos como nexo con la utilización de la energía eléctrica. A continuación se repasan los conceptos básicos de cinemática y dinámica del punto.

Posición, velocidad y aceleración unidimensional

Problemas directo e inverso

Movimiento rectilíneo variado, uniforme y uniformemente acelerado

Movimiento rectilíneo variado

Movimiento rectilíneo uniforme

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Movimiento rectilíneo variado en función de la posición

Movimiento rectilíneo variado en función de la velocidad

Resolución simbólica, numérica y gráfica

2. Traslación rectilínea del punto

El *movimiento rectilíneo* es el movimiento de una partícula en línea recta. En un instante dado t , la partícula ocupará una posición sobre la recta. Se desea conocer la posición, velocidad y aceleración de la partícula en dicho instante.

2.1 Posición, velocidad y aceleración unidimensional

Para definir la *posición* P de la partícula:

1. Se toma un origen fijo O sobre la recta y una dirección positiva a lo largo de la misma.
2. Se mide la distancia s del punto fijo O al punto móvil P , con el signo correspondiente.

La distancia s , con el signo apropiado, define la posición y se la llama *coordenada de posición* de la partícula. Para el ejemplo de la Fig. 2.1, la posición es $s = +6\text{ m}$.

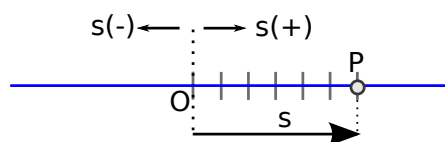


Figura 2.1: Definición de la posición de un punto y su coordenada

El *movimiento* está definido por la ley de variación de la coordenada de posición s para cualquier instante t , en forma de función $s = f(t)$; por ejemplo como $s(t) = 6t^2 - t^3$.

En el Sistema Internacional (S.I.) de unidades la posición se mide en metros $[\Delta s] = \text{m}$ y en el sistema S.U., imperial o inglés se mide en pies $[\Delta s] = \text{pie}$ donde $1 \text{ pie} = 0,32 \text{ m}$. En países de habla inglesa al *pie*, se lo designa también como *ft* (por *feet*).

El *desplazamiento* es la diferencia entre la posición final y la inicial $\Delta s = s_f - s_i$ en un lapso de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. En el ejemplo de la Fig. 2.2, $\Delta s' = 5 - 3 = 2$; $\Delta s'' = 2 - 5 = -3$; $\Delta s = 2 - 3 = -1 = \Delta s' + \Delta s''$

La *velocidad media* es el cociente entre el desplazamiento y el lapso de tiempo Δt en que ocurre el mismo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

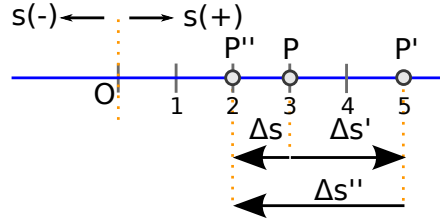


Figura 2.2: Ejemplo de desplazamiento

en donde el signo depende sólo de Δs .

La *velocidad (instantánea)* se obtiene escogiendo intervalos Δt cada vez más pequeños para la expresión de la velocidad media, y en el límite se obtiene la definición de la derivada temporal del desplazamiento:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.1)$$

Las unidades de velocidad son $[v] = [v_m] = [L]/[T]$. Se mide en m/s en el SI, y en pie/s en el SU. La magnitud de v es la *rapidez*.

Un cambio de velocidad finito es la diferencia entre la velocidad final y la inicial $\Delta v = v_f - v_i$ en un lapso de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$.

La *aceleración media* es el cociente entre el cambio de velocidad y el lapso de tiempo Δt en que ocurre, y se la define como:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

en donde el signo depende sólo de Δv .

La *aceleración (instantánea)* se obtiene escogiendo intervalos Δt cada vez más pequeños, en el límite, se tiene:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.2)$$

Las unidades de aceleración son $[a] = [a_m] = [L]/[T]^2$. Se mide en m/s² en el SI y en pie/s² en el SU.

Otra expresión de la aceleración instantánea se obtiene partiendo de $v = \frac{ds}{dt}$, en donde se despeja $dt = \frac{1}{v} ds$ tal que reemplazada en la aceleración resulta en una ecuación diferencial dependiente de v y s

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad (2.3)$$

o se obtiene aplicando la regla de la cadena considerando a v como dependiente de $s(t)$, tal que

$$a(t) = \frac{dv}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v$$

2.1.1 Problemas directo e inverso

En los problemas de movimiento rectilíneo, dada una de las funciones que describen el movimiento, $s = s(t)$, $v = v(t)$, ó $a = a(t)$, se deben obtener las otras dos funciones, ya sea derivando (*problema directo*) o integrando (*problema inverso*).

Si recuadramos a la función dato, el procedimiento sería el siguiente

$$\begin{array}{lcl} \boxed{s = s(t)} \rightarrow & v = \frac{ds}{dt} \rightarrow & a = \frac{dv}{dt} \\ s = \int v dt \leftarrow & \boxed{v = v(t)} \rightarrow & a = \frac{dv}{dt} \\ s = \int v dt \leftarrow & v = \int a dt \leftarrow & \boxed{a = a(t)} \end{array}$$

2.2 Movimiento rectilíneo variado, uniforme y uniformemente acelerado

El primer y segundo caso son sencillos de resolver. Para el tercero, se tienen 3 casos según esté dada a :

- I) En función del tiempo $a = f(t)$ se denomina Movimiento Rectilíneo Variado (MRV), y hay dos casos notables con nombres propios:
 - Si $a(t) = 0$, Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).
 - Si $a(t) = \text{cte}$, Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA).
- II) En función de la posición $a = f(s)$.
- III) En función de la velocidad $a = f(v)$.

2.2.1 Movimiento rectilíneo variado

Para el caso I general de MRV, dada $a = f(t)$, en la expresión $a(t) = \frac{dv}{dt}$ aplicamos el método de separación de variables, en donde el miembro izquierdo queda en función de v y el derecho de t , luego integramos con respecto a dichas variables

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt = f(t)dt$$

$$\int dv = \int f(t)dt$$

En el tiempo inicial t_0 se conoce la posición y la velocidad, s_0 y v_0 , se las denomina condiciones iniciales (C.I.) y serán los límites inferiores de las integrales

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t)dt; \quad v - v_0 = \int_0^t f(t)dt \rightarrow \boxed{v = v(t)}$$

de $v(t) = \frac{ds}{dt}$ despejamos $ds = v(t)dt$ e integramos para las C.I.s

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(v_0 + \int_0^t f(t)dt \right) dt \rightarrow \boxed{s = s(t)}$$

2.2.2 Movimiento rectilíneo uniforme

Para el caso I particular MRU, de velocidad constante o aceleración nula $a = f(t) = 0$, se utilizan las condiciones iniciales s_0 y v_0 al tiempo t_0

$$v - v_0 = \int_0^t 0dt = 0 \rightarrow \boxed{v = v(t) = v_0}$$

de $v(t) = \frac{ds}{dt}$ despejamos $ds = v(t)dt$ e integramos para la C.I. de posición

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0)dt = v_0 \int_0^t dt$$

$$s - s_0 = v_0 t \rightarrow \boxed{s(t) = s_0 + v_0 t}$$

Claramente, si $a = 0$, la velocidad es constante y la posición es una función lineal del tiempo.

2.2.3 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Para el caso I particular MRUA, de aceleración constante donde $a = f(t) = cte = a_0$ y condiciones iniciales s_0 y v_0 al tiempo t_0 , y se obtiene

$$v - v_0 = \int_0^t a_0 dt = a_0 t \rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + a_0 t}$$

de $v(t) = \frac{ds}{dt}$ despejamos $ds = v(t)dt$ e integramos para la C.I.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + a_0 t) dt$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \rightarrow \boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2}$$

Claramente, si a es constante, la velocidad es lineal y la posición es cuadrática con el tiempo.

En el MRUA con $a = f(t) = cte = a_0$ y cuando el lapso de tiempo no se conoce, también se puede utilizar la expresión (2.3) para hallar $v(a_0, v_0, s_0, s) = v(s)$. Usando $a(t) = v \frac{dv}{ds} = a_0$ y separando variables, obtenemos

$$v dv = a_0 ds,$$

e integrando m.a.m. para las C.I. s_0 y v_0 al tiempo t_0

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_0 ds$$

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = a_0 (s - s_0) \rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0)}$$

2.2.4 Movimiento rectilíneo variado en función de la posición

Para el caso II, de aceleración en función de la posición $a = f(s)$, también se integra (2.3), es decir, $a(s) = v \frac{dv}{ds}$, y separando variables obtenemos

$$v dv = a(s) ds$$

e integrando m.a.m. para las C.I. s_0 y v_0 al tiempo t_0

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a(s) ds$$

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^s a(s) ds \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds \rightarrow \boxed{v = v(s)}$$

De $v = \frac{ds}{dt}$, vimos que se despeja $dt = \frac{1}{v(s)} ds$, e integrando m.a.m. para las C.I. se obtiene la función $s(t)$

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{s_0}^s \frac{1}{v(s)} ds$$

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{1}{v(s)} ds \rightarrow \boxed{s = s(t) \quad \therefore \quad v = \dot{s} \quad \therefore \quad a = \dot{v} = \ddot{s}}$$

2.2.5 Movimiento rectilíneo variado en función de la velocidad

Para el caso III, de aceleración en función de la velocidad $a = f(v)$, se parte de $a(v) = \frac{dv}{dt}$. Separando variables, obtenemos

$$dt = \frac{1}{a(v)} dv,$$

e integrando m.a.m. para las C.I. s_0 y v_0 al tiempo t_0 se obtiene

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{v_0}^v \frac{1}{a(v)} dv$$

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{1}{a(v)} dv \rightarrow \boxed{v = v(t)}$$

integrando la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$ se obtiene $\therefore s(t) = s_0 - \int_{t_0}^t v(t) dt$

y derivando la velocidad se obtiene la aceleración $\boxed{a(t) = \frac{dv(t)}{dt}}$.

R Como resumen, cabe destacar que las fórmulas cerradas para posición y velocidad se obtienen para casos de aceleración nula o constante. Para los casos de aceleración variable, la velocidad y la posición quedan expresadas en forma analítica por dos integrales sucesivas con sus respectivas condiciones iniciales.

2.3 Resolución simbólica, numérica y gráfica

Simbólica: Se aplica cuando se dispone de las expresiones analíticas de las funciones cinemáticas $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ y se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes. Los resultados son exactos. Para el caso en que no se dispone de las expresiones analíticas o son excesivamente difíciles de resolver, se procede a utilizar métodos numéricos (mecánica computacional).

Numérica: Consiste en procesar la función conocida, derivándola o integrándola con métodos numéricos aproximantes, para intervalos finitos de la variable dependiente. Se usan los métodos numéricos que Uds verán en la materia de Cálculo Numérico. Por ejemplo, en sistemas de un vehículo para el control de estabilidad total (que evita deriva del vehículo y minimiza el patinamiento de ruedas optimizando la tracción), la señal o función cinemática de posición angular medida se filtra o suaviza, y luego se integra o deriva para tomar decisiones de control sobre el torque en ruedas.

Gráfica: Las técnicas de derivación e integración gráfica se han dejado de usar por el éxito de las dos anteriores facilitadas computacionalmente. La interpretación entre las curvas, sus pendientes y el área bajo las curvas es importante.

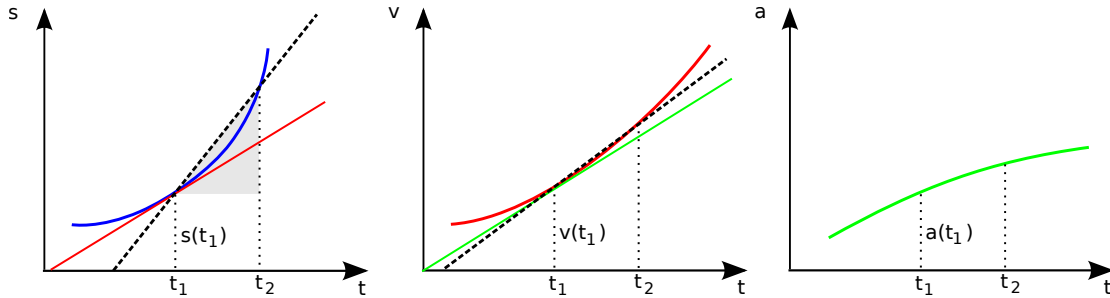


Figura 2.3: Interpretación de la derivada: La velocidad en el instante t_1 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de posición en ese instante. La aceleración en el instante t_1 es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de velocidad en ese instante.

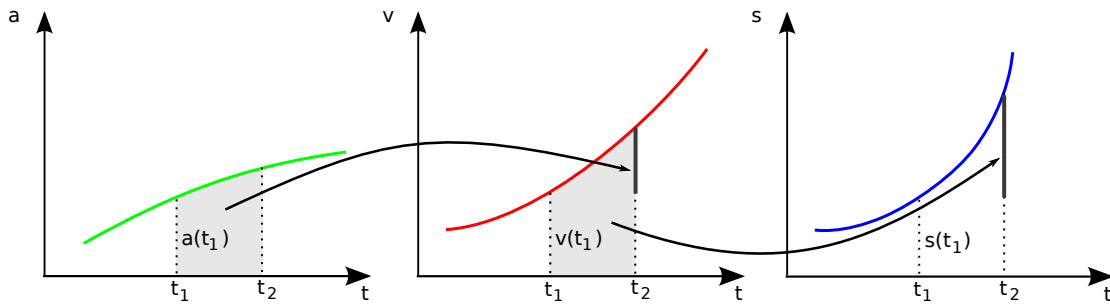


Figura 2.4: Interpretación de la integral: Conociendo la función $a(t)$ (dibujada a la izquierda) es posible obtener la función velocidad (dibujada al medio) por integración: la velocidad en el instante t_2 es igual a la velocidad en el instante t_1 más el área bajo la curva de aceleración entre los instantes t_1 y t_2 , es decir, $v(t_2) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$. Idénticamente, dada la función $v(t)$ (dibujada en el medio) es posible obtener la función posición por integración: la posición en el instante t_2 es igual a la posición en el instante t_1 más el área bajo la curva de velocidad entre los instantes t_1 y t_2 , es decir, $s(t_2) = s(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Sistemas de coordenadas

Coordenada vectorial

Vectores

Vectores naturales

Vectores Cartesianos

Vectores de otros sistemas coordenados

Vectores posición, velocidad y aceleración

Vector aceleración en 3D

Derivadas temporales importantes

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Componentes Cartesianas de la posición, velocidad y aceleración

Componentes polares de la velocidad y la aceleración

Movimiento angular de una partícula

3. Traslación curvilínea del punto

A continuación se describe la traslación curvilínea que convenientemente se desarrolla en el espacio tridimensional [BJC10, Cap. 11], desde donde se pueden enunciar razonamientos válidos para dos dimensiones.

3.1 Sistemas de coordenadas

La **coordenada** escalar de un punto es un valor o conjunto de valores numéricos que expresan cuantitativamente la **posición del punto** respecto a un sistema fijo de referencia. Comenzaremos describiendo distintos sistemas de referencias y las coordenadas en los mismos.

Coordenada natural o intrínseca: Es una coordenada lineal dada por la longitud de arco s de la trayectoria de la partícula, definida entre el origen fijo O y el punto $P(s)$ ocupado por la partícula P . Se elige un origen O y un signo para s desde O . *Observación:* Como se muestra en la Figura 3.1, este sistema de coordenada depende de la trayectoria.

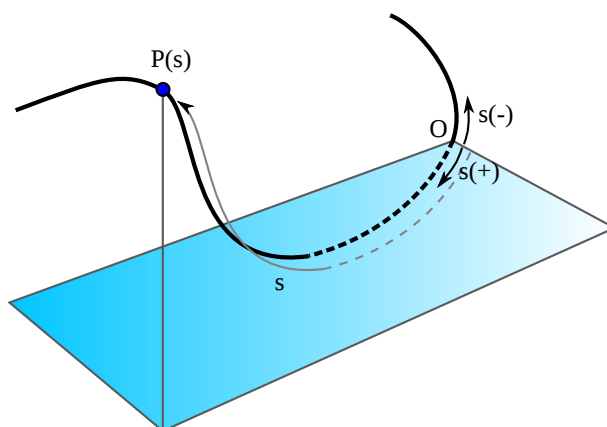


Figura 3.1: Definición de la coordenada natural de posición.

Coordenadas Cartesianas rectangulares: El sistema consiste de ejes fijos ortogonales definidos por la intersección de planos ortogonales.

- Los ejes se cortan en el origen fijo O que los divide en semiejes positivos y negativos. Estos signos definen un sistema dextrógiro (regla de la mano derecha) o levógiro y definen también el signo de los ángulos. Por ejemplo, un ángulo positivo alrededor del eje x gira, observando desde $x+$, desde y hacia z . La regla de la mano derecha indica giro positivo cuando el pulgar apunta desde O hacia $x+$ y se gira la mano hacia la punta de los dedos.
- Las coordenadas cartesianas x , y , y z de un punto P , son las distancias de P a los planos coordenados YOZ , XOZ y XOY , respectivamente.

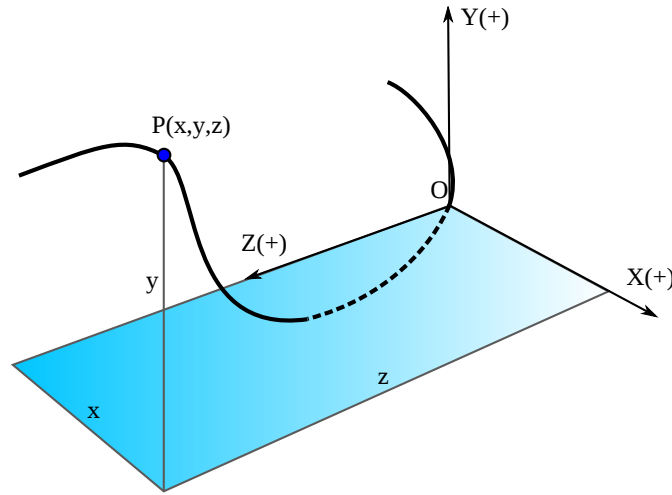


Figura 3.2: Coordenadas Cartesianas rectangulares

- Distancia $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Los cosenos directores son los cosenos de los ángulos α , β y γ entre el segmento $\overline{OP}$ y los ejes X , Y y Z , respectivamente mostrados en la Figura 3.3. Éstos valores, multiplicados por el tamaño del segmento $\overline{OP}$ permiten obtener las coordenadas como:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OP} \cos \alpha; \\ y &= \overline{OP} \cos \beta; \\ z &= \overline{OP} \cos \gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observación: Como se muestra en la Figura 3.2, las coordenadas Cartesianas son independientes de la trayectoria.

Otros sistemas en $\mathbb{R}^2$:

- *Polares:* $P(r, \theta)$, con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Otros sistemas en $\mathbb{R}^3$:

- *Cilíndricas:* $P(R, \theta, z)$, con $R \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$.
- *Esféricas:* $P(R, \theta, \varphi)$, con $R \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \varphi < \pi$.

3.1.1 Coordenada vectorial

Una magnitud vectorial tiene un valor o magnitud escalar, dirección y sentido. Un *vector* se puede expresar como el producto de su magnitud por un vector unitario.

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}, \quad \vec{r} = r\hat{\mathbf{e}}, \quad |\hat{\mathbf{e}}| = 1$$

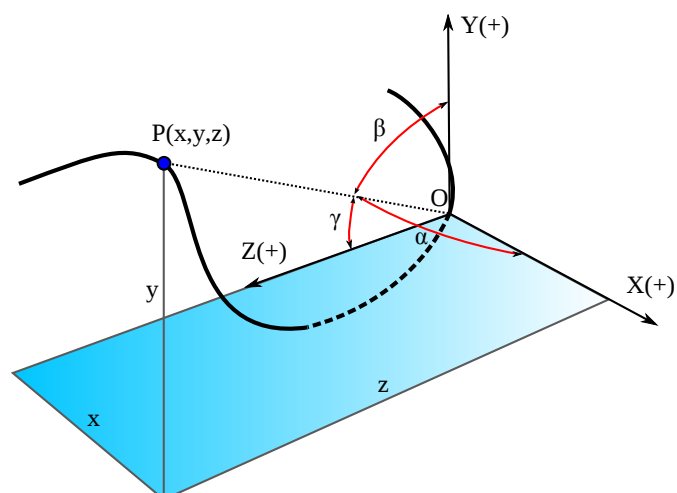


Figura 3.3: Ángulos necesarios para definir las coordenadas a través de sus cosenos y la distancia $\overline{OP}$.

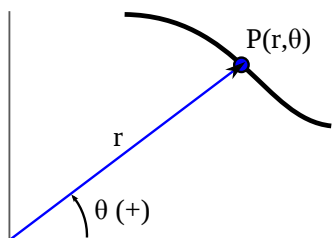


Figura 3.4: Definición de las coordenadas polares: la distancia r del origen al punto P es definido positivo, el ángulo θ se mide positivo en el sentido antihorario.

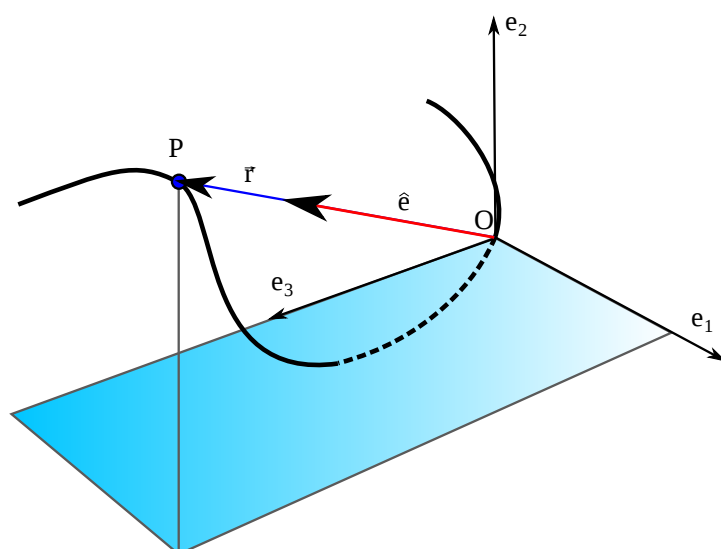


Figura 3.5: Vector posición utilizando la coordenada vectorial.

- El vector se puede expresar como combinación lineal de vectores base (versores) y los números que multiplican a los vectores base son denominados coordenadas vectoriales o componentes del vector en cierta base.

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3; \quad |\mathbf{e}_i| = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

- Las componentes se arreglan como duplas (r_1, r_2) en el plano o tripletes (r_1, r_2, r_3) ordenados para el caso tridimensional.
- Al vector lo denotaremos en letra minúscula negrita; manualmente, lo distinguimos por una flecha arriba.

3.2 Versores

Un *versor* es un vector unitario que sirve de base vectorial para definir otros vectores, se lo designa con un sombrero y en negrita. Un conjunto de versores define un espacio vectorial. Describiremos primero diversos tipos de versores.

3.2.1 Versores naturales

Los *versores naturales* o intrínsecos en $\mathbb{R}^3$ se utilizan con coordenadas naturales. Se definen como versores ortogonales entre sí con origen fijo a la partícula $O \equiv P$ y orientándose según la geometría de la trayectoria del siguiente modo

- versor tangencial $\hat{\mathbf{i}}_t$, es tangente a la trayectoria.
- versor normal $\hat{\mathbf{i}}_n$, dirigido hacia el centro de curvatura, es ortogonal al tangencial $\hat{\mathbf{i}}_t$ y define con el mismo el *plano osculador*.
- versor binormal $\hat{\mathbf{i}}_b$, es normal al plano osculador.

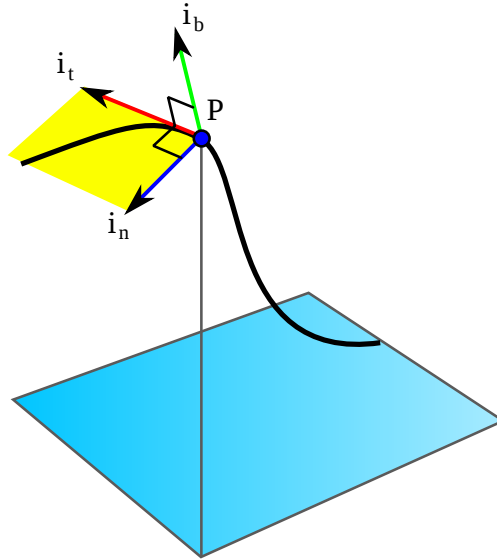


Figura 3.6: Definición de los versores naturales (también llamado triedro de Frénet-Serret)

Observación: la orientación de la terna $\{\hat{\mathbf{i}}_t, \hat{\mathbf{i}}_n, \hat{\mathbf{i}}_b\}$ varía con la posición y depende de la geometría de la trayectoria en dicha posición.

3.2.2 Versores Cartesianos

Definiremos a los *versores Cartesianos* en $\mathbb{R}^3$ como ortogonales entre sí, fijos a los semiejes positivos X , Y y Z de un sistema de coordenadas cartesianas y denotados como $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$.

Por ejemplo, la posición de $P(x, y, z)$ se puede expresar mediante 3 componentes vectoriales, cada una de ellas expresadas como combinación lineal de los versores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y, z) &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \\ &= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

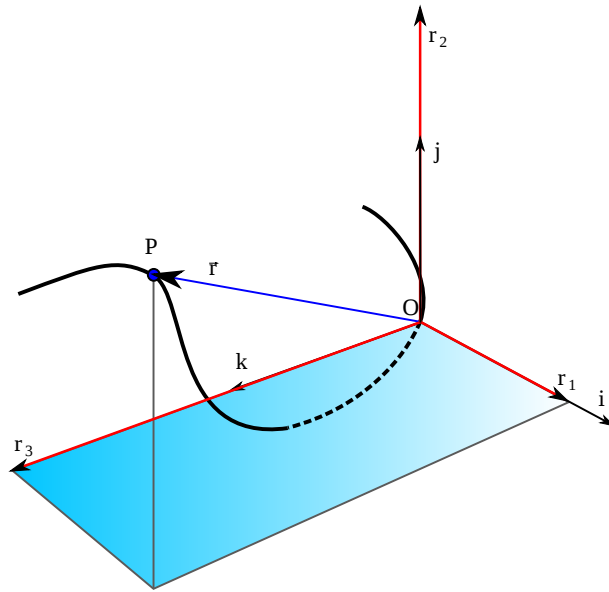


Figura 3.7: Versores cartesianos utilizados para expresar las componentes vectoriales del vector posición.

Observación: La orientación de la terna $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ es invariante para cualquier trayectoria.

3.2.3 Versores de otros sistemas coordenados

Siguiendo el razonamiento anterior, se definen versores como base de vectores definidos en otros sistemas coordenados, por ejemplo:

Versores polares $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 3.8):

- versor radial $\hat{\mathbf{i}}_r$, tiene dirección dirigida del origen al punto.
- versor transversal $\hat{\mathbf{i}}_\theta$, perpendicular al anterior y adelantado 90° .
- La orientación de la terna $\{\hat{\mathbf{i}}_r, \hat{\mathbf{i}}_\theta\}$ cambia con el punto de la trayectoria.

Versores cilíndricos $\mathbb{R}^3$:

- versor radial $\hat{\mathbf{i}}_R$, tiene dirección dirigida del origen al punto proyectado en el plano polar, es paralelo al plano polar.
- versor de altura $\hat{\mathbf{k}}$, perpendicular al anterior y adelantado 90° .
- versor transversal $\hat{\mathbf{i}}_\theta$, perpendicular al radial y al de altura.
- La orientación de la terna $\{\hat{\mathbf{i}}_R, \hat{\mathbf{i}}_\theta, \hat{\mathbf{k}}\}$ cambia con el punto de la trayectoria.

Versores esféricos $\mathbb{R}^3$:

- versor radial $\hat{\mathbf{i}}_R$, tiene dirección dirigida del origen al punto.
- versor de longitud $\hat{\mathbf{i}}_\theta$, perpendicular al anterior y paralelo al *meridiano de referencia*.
- versor de latitud $\hat{\mathbf{i}}_\varphi$, perpendicular a los anteriores y paralelo al *paralelo de referencia*.
- La orientación de la terna $\{\hat{\mathbf{i}}_R, \hat{\mathbf{i}}_\theta, \hat{\mathbf{i}}_\varphi\}$ cambia con el punto de la trayectoria.

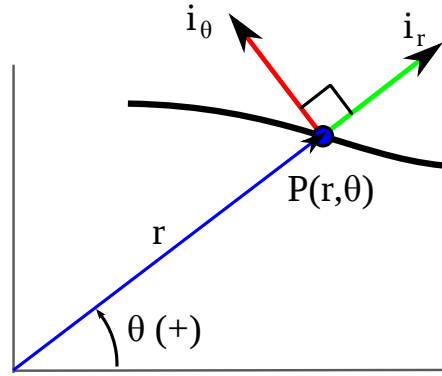


Figura 3.8: Ejemplo de versores polares: Se consideran con origen en el punto P para definir las derivadas de la posición (velocidad, aceleración, etc.).

3.3 Vectores posición, velocidad y aceleración

Vector posición en $\mathbb{R}^3$: Es la función vectorial dada como $\vec{r}(t)$.

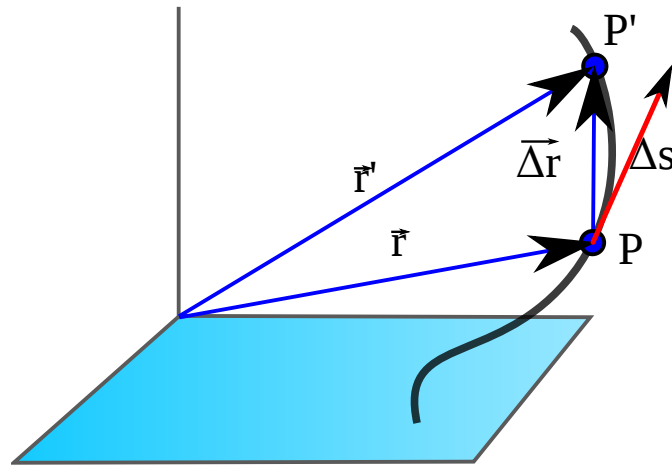


Figura 3.9: Definición vectorial del vector de la velocidad instantánea

Vector velocidad en $\mathbb{R}^3$: Se tiene una partícula P al instante t en posición $\vec{r}(t)$ y luego, en P' al instante $t' = t + \Delta t$ en posición $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}'$.

Velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Rapidez: es la magnitud de la velocidad

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{PP'}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

3.3.1 Vector aceleración en 3D

A continuación desarrollaremos la expresión del vector aceleración en $\mathbb{R}^3$.

$P(t)$ con velocidad $\vec{v}$.

$P'(t + \Delta t)$ con velocidad $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}'$.

Aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v(t)}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v(t)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

La curva descrita por el extremo del vector $\vec{v}$ es llamada *hodógrafa del movimiento*. La aceleración $\vec{a}$ es tangente a ella.

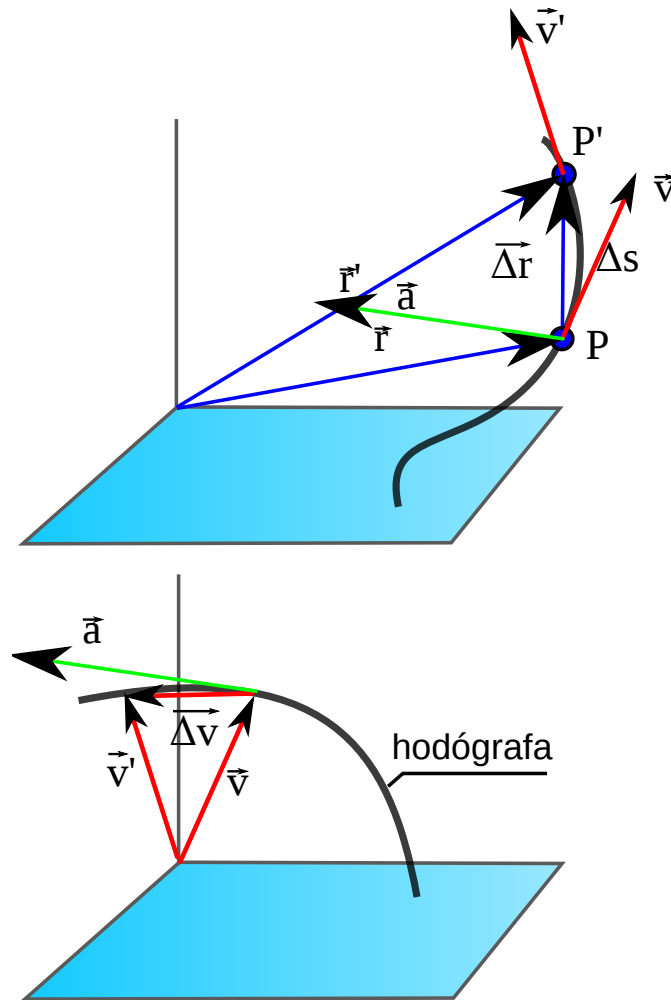


Figura 3.10: Para determinar la dirección del vector aceleración, se ubican a todos los vectores velocidad en un origen común, describiendo en sus extremos a la curva hodógrafa. El vector aceleración instantánea es tangente a la hodógrafa en el punto considerado.

3.4 Derivadas temporales importantes

Utilizando la definición de la derivada de una función vectorial $\vec{P}(t)$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t}$$

se pueden obtener las derivadas de la suma con otra función vectorial $\vec{Q}(t)$

$$\frac{d(\vec{P} + \vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

y entre los productos notables y posibles, incluimos respectivamente, el producto por una función escalar $f(t)$, el producto escalar y el producto vectorial con otra función vectorial, obteniéndose las siguientes propiedades de la derivación temporal:

$$\frac{d(f\vec{P})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{P} + f\frac{d\vec{P}}{dt} \quad (3.2)$$

$$\frac{d(\vec{P} \cdot \vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (3.3)$$

$$\frac{d(\vec{P} \times \vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (3.4)$$

Estas reglas de derivación junto con la elección del sistema coordenado y sus versores, nos permitirán obtener diferentes expresiones de la posición, velocidad y aceleración.

3.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

En coordenadas naturales el dato es la función de la posición $s(t)$. Representamos al vector velocidad como el producto de la función escalar $v(t) = \dot{s}$ y el versor $\hat{i}_t(s(t))$ variable con la posición y el tiempo:

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{i}_t} \quad (3.5)$$

La aceleración se obtiene derivando a la función vectorial $\vec{v}$ con respecto a t como el producto de la Ec. (3.2), obteniéndose dos términos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{i}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{i}_t + v\frac{d\hat{i}_t}{dt} \quad (3.6)$$

- En el primer término, una componente de la aceleración tendrá dirección tangencial y sentido dependiente del signo de $\frac{dv}{dt}$; se la denomina aceleración tangencial.
- En el segundo término necesitamos conocer el significado de $\frac{d\hat{i}_t}{dt}$, la derivada temporal del versor $\hat{i}_t$.

Derivada temporal del versor $\hat{i}_t$

Definimos al plano osculador en un punto como el plano que es generado por los versores tangencial y normal. Dadas dos posiciones de la partícula, P y P' , dichos planos se muestran en la Figura 3.11. Primero se considera que el versor $\hat{i}_t$ depende de la rotación θ de los planos osculadores y esta rotación depende del tiempo. Luego, aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d\hat{i}_t(\theta(t))}{dt} = \frac{d\hat{i}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.7)$$

donde, $\frac{d\theta}{dt}$ es una velocidad angular que analizaremos luego. Nos enfocaremos a analizar el primer producto con el auxilio de la Figura 3.11 y la definición de derivada

$$\frac{d\hat{i}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\hat{i}_t' - \hat{i}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\hat{i}_t}}{\Delta\theta} = \hat{i}_n \quad (3.8)$$

es decir, que la curva descrita por el extremo del versor $\hat{i}_t$, que instantáneamente es circular, tiene un vector tangente cuya dirección es la del versor $\hat{i}_n$.

Superponemos a los orígenes de planos osculadores que rotan un ángulo $\Delta\theta$. Debido a que la magnitud de los versores se preserva, la magnitud de la derivada del versor $\hat{i}_t$ es unitaria (recurriendo a aplicar trigonometría a los dos triángulos que se dibujan en la parte inferior de la Figura 3.11 y usando un caso de límite notable de la función $\sin(x)/x = \text{sinc}(x)$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{i}_t}{d\theta} \right| &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} = 1 \end{aligned}$$

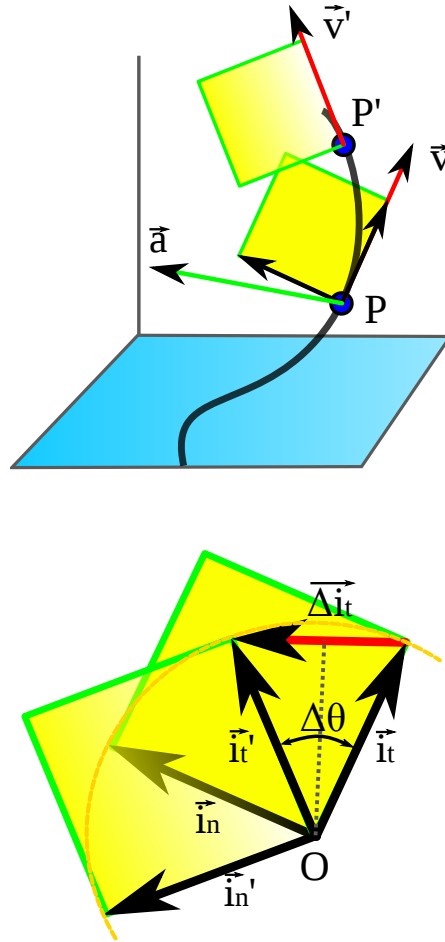
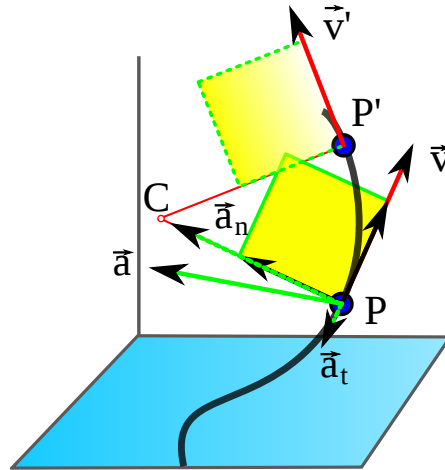


Figura 3.11: Planos osculadores de la partícula a tiempo t y t' , superpuestos en un origen común O .

En segundo lugar se considera que el versor $\hat{i}_t$ depende de la rotación θ de los planos osculadores y esta rotación depende, además, de la posición s como función del tiempo. Luego, aplicando la regla de la cadena se obtiene la *derivada temporal del versor $\hat{i}_t$* ,

$$\frac{d\hat{i}_t(\theta(s(t)))}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{i}_t}{d\theta}}_{\hat{i}_n} \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{1/\rho} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = \frac{v}{\rho} \hat{i}_n$$



Donde el radio de curvatura se deduce geométricamente como

$$\text{angulo} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \therefore \text{radio} = \frac{\text{arco}}{\text{angulo}} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\text{angulo}}{\text{arco}} = \frac{d\theta}{ds}$$

Finalmente, la aceleración se descompone en sus componentes tangencial y normal de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{dv}{dt} \hat{i}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{i}_n \\ &= a_t \hat{i}_t + a_n \hat{i}_n \\ &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Las coordenadas naturales tienen como principal ventaja a su interpretación clara:

1. $\vec{a}_t$ siempre tiene dirección tangente a la trayectoria y su magnitud $\frac{dv}{dt}$ indica la tasa de cambio de la rapidez de la partícula.
2. $\vec{a}_n$ siempre está dirigida hacia el centro de curvatura C de la trayectoria e indica tasa de cambio de la dirección de su movimiento.
3. $\vec{a}_b = 0$, no existe componente de aceleración en dirección binormal $\hat{i}_b = \hat{i}_t \times \hat{i}_n$.

Como desventaja, las coordenadas naturales requieren del conocimiento previo de la geometría de la trayectoria, la cual no siempre es un dato.

3.6 Componentes Cartesianas de la posición, velocidad y aceleración

El movimiento curvilíneo se puede descomponer en tres movimientos rectilíneos independientes que son representados en coordenadas Cartesianas por las funciones del tiempo $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ (parametrización de la trayectoria), en donde los versores $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ son invariantes en el tiempo. Como las derivadas con respecto al tiempo de los versores se anulan, las ecuaciones cinemáticas resultan

■ Posición:

$$\vec{r}(x, y, z) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$$

■ Velocidad:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \end{aligned}$$

■ Aceleración:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \end{aligned}$$

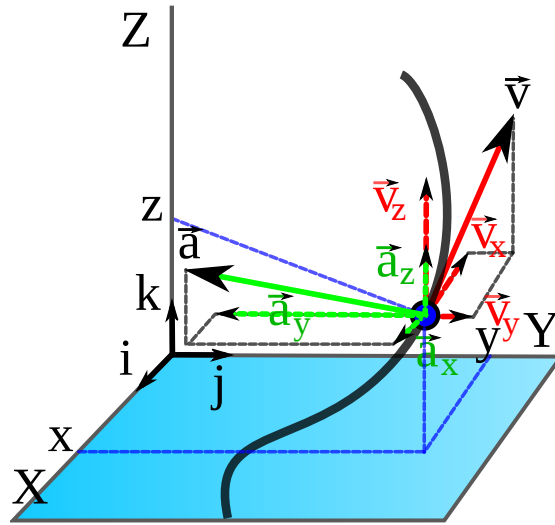


Figura 3.12: Componentes Cartesianas de posición, velocidad y aceleración.

Las componentes vectoriales de la posición, velocidad y aceleración, se ilustran como vectores en trazos en la Figura 3.12, y expresados en la forma

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{a} &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}\end{aligned}$$

se aprecia que las leyes de movimiento son desacopladas o independientes en sus direcciones ortogonales.

Ventajas de las coordenadas Cartesianas:

- Vectores posición, velocidad y aceleración expresados en la misma terna invariante con el tiempo e independiente de la trayectoria.
- Adecuado para implementación computacional para simular múltiples partículas.

Desventajas:

- Difícil interpretación de las componentes, a menos que se visualicen los vectores.

3.7 Componentes polares de la velocidad y la aceleración

En muchos casos de movimiento plano (en $\mathbb{R}^2$) conviene utilizar una descripción en coordenadas polares $r(t)$ y $\theta(t)$, donde el vector posición que expresado en términos del versor radial únicamente, no así sus derivadas (velocidad y aceleración).

Posición:

$$\vec{r} = r\hat{i}_r$$

Para derivar la posición, aplicamos la Ec. (3.2) gira $\Delta\theta$

$$\vec{v} = \frac{d(r\hat{i}_r)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt}$$

y para analizar las derivadas de los versores se consideran dos instantes para $\vec{r}$ como se muestra en la Figura 3.13 y se aplica la definición de derivada. En forma análoga que para los planos osculadores de las coordenadas naturales, se obtienen la derivada temporal del versor radial $\hat{i}_r$ y la derivada temporal del versor transversal $\hat{i}_\theta$

$$\frac{d\hat{i}_r(\theta(t))}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{i}_r}{d\theta}}_{\hat{i}_\theta} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\hat{i}_\theta = \omega\hat{i}_\theta \quad (3.9)$$

$$\frac{d\hat{i}_\theta(\theta(t))}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{i}_\theta}{d\theta}}_{-\hat{i}_r} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{i}_r = -\omega\hat{i}_r \quad (3.10)$$

donde es indistinto usar $\dot{\theta}$ u ω para expresar la velocidad angular del giro de los versores.

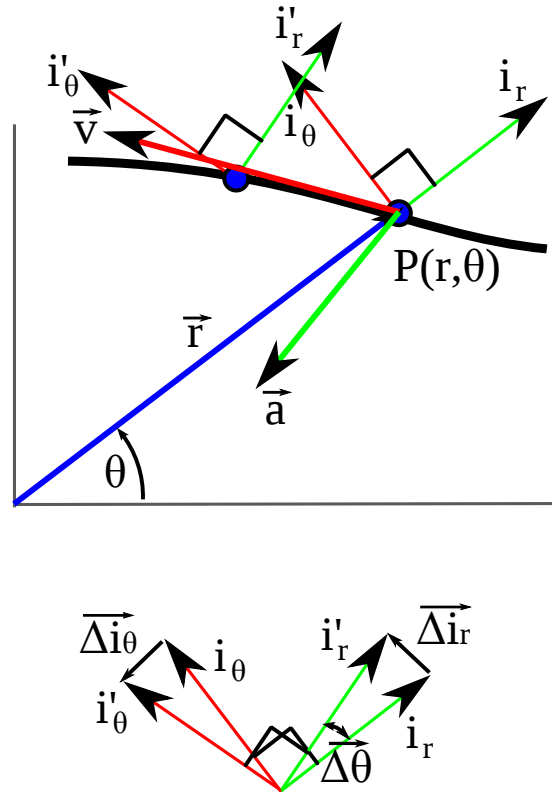


Figura 3.13: Partícula en dos posiciones (arriba) y construcción geométrica de los versores necesaria para obtener sus derivadas (abajo).

Velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\theta}\hat{i}_\theta = v_r\hat{i}_r + v_\theta\hat{i}_\theta} \quad (3.11)$$

R Nótese que en la expresión (3.11) de la velocidad, v_r es independiente del movimiento transversal pero v_θ depende de r .

Aceleración:

Derivando en (3.11) cada componente vectorial de la velocidad y utilizando las derivadas de los versores ya definidas en (3.9) y (3.10) se obtiene la aceleración. Nótese que se deben agrupar los términos con igual versor en las componentes radial y transversal

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{r}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{i}_\theta) + r\frac{d(\dot{\theta}\hat{i}_\theta)}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{i}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{i}_\theta + r(\ddot{\theta}\hat{i}_\theta) + r(\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{i}_r)) \\ \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{i}_\theta = a_r\hat{i}_r + a_\theta\hat{i}_\theta} \quad (3.12)\end{aligned}$$

R Cabe destacar que en la expresión (3.12) de la aceleración, a_r no es derivada temporal de v_r y a_θ no es derivada temporal de v_θ . A diferencia de las coordenadas Cartesianas los movimientos en las direcciones radial y transversal están acoplados.

3.7.1 Movimiento angular de una partícula

Considerando el caso particular mostrado en la Figura 3.14 en que una partícula gira con radio constante, donde $r(t) = cte$ implica que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, se obtienen las expresiones de velocidad y aceleración siguientes

Velocidad:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{i}_\theta = v_\theta\hat{i}_\theta$$

donde $\dot{\theta} = \omega$ es la *velocidad angular de la terna de versores* con respecto al origen;

Aceleración:

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{i}_r + r\ddot{\theta}\hat{i}_\theta = a_r\hat{i}_r + a_\theta\hat{i}_\theta$$

donde $\ddot{\theta} = \alpha$ es la *aceleración angular de la partícula*.

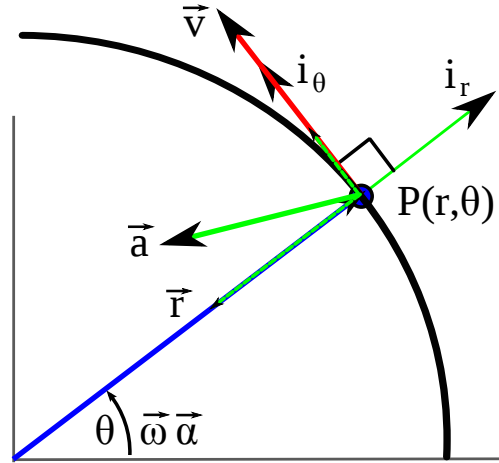


Figura 3.14: Partícula trasladándose en una trayectoria circular.

R Si además, la velocidad angular es constante, $\dot{\theta} = \omega = cte$ ($\ddot{\theta} = \alpha = 0$), luego

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{i}_r = -r\left(\frac{v_\theta}{r}\right)^2\hat{i}_r = -\frac{v_\theta^2}{r}\hat{i}_r$$

es decir, se obtiene la expresión de la aceleración centrípeta, bien conocida para un punto de un cuerpo girando a velocidad angular constante. La velocidad sólo tiene componente transversal y la aceleración sólo tiene componente radial.

Principios y leyes de la dinámica

Ecuación vectorial del movimiento
Fuerzas de acción y reacción. Fuerza de inercia.

Sistemas de unidades Absoluto y Gravitatorio.

Sistema Internacional de Unidades (SI),
Métrico, o Absoluto (MKS)
Sistema Imperial (SU), Inglés o gravitacional

Ecuaciones escalares del movimiento

Fuerzas activas y reactivas
Diagrama de cuerpo libre (DCL)

4. Cinética del punto

4.1 Principios y leyes de la dinámica

Ya conocemos cómo describir la posición, velocidad y aceleración de un *punto material en movimiento*. Comenzaremos a estudiar el efecto de las *fuerzas* involucradas con un experimento básico:

1. Se aplican fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ de diferentes direcciones y magnitudes sobre una misma partícula.
2. Asumimos que un sistema de referencia Newtoniano o inercial¹ se miden las aceleraciones $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$ de cada experimento.
3. Se observa que sus magnitudes satisfacen

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{cte} = k m$$

El valor que relaciona las magnitudes es la masa m de la partícula y es una medida cuantitativa de la inercia a permanecer en el estado actual.

Entonces $\vec{F}$ y $\vec{a}$ son proporcionales, pero además, tienen la misma dirección.

La forma literal en que conocemos los principios básicos de la dinámica es la siguiente:

1^{era} Ley de Newton: “Todo cuerpo se mantiene en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas aplicadas sobre él”.

3^{era} Ley de Newton: “Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: es decir, que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto”.

Estas dos leyes se estudian en *estática*. En cuerpos acelerados se utiliza la

2^{da} Ley de Newton: “El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime”.

Definiendo el vector momentum como el producto de la masa por la velocidad $\vec{p} = m \vec{v}$, estas leyes fueron enunciadas por Newton como:

1^{era} Ley de Newton: “El momentum de una masa puntual es constante cuando está libre de fuerzas externas”, o sea,

$$\vec{p} = m \vec{v} = \text{cte} \quad (4.1)$$

y se deduce que si $\vec{v} = \vec{v}_0$ el movimiento es rectilíneo uniforme, o se mantiene en reposo estático si $\vec{v} = \vec{0}$ (*Ley de Inercia*).

¹con origen fijo y orientación constante con respecto a las estrellas polares, o con movimiento a velocidad constante con respecto al centro de masa del sistema solar.

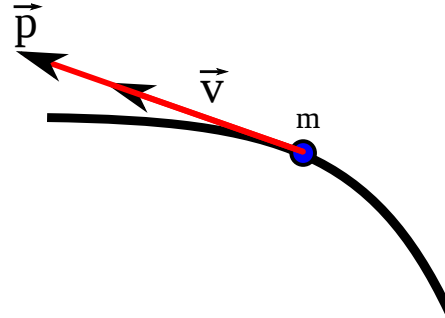


Figura 4.1: Vectores velocidad y momentum lineal de una partícula.

2ª Ley de Newton: “La tasa de cambio del momentum de una masa m es igual a la fuerza externa neta actuante sobre él”.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

4.1.1 Ecuación vectorial del movimiento

Si en la 2da ley consideramos que m es constante (como lo haremos en los problemas de este curso) obtenemos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (4.2)$$

R Esta forma de la 2da ley contiene a la primera cuando $\vec{F} = \vec{0}$.

La segunda ley tiene validez bajo condiciones:

1. En un *marco de referencia inercial*
2. Si la velocidad es inferior a la de la luz, que es $c \approx 300\,000\text{ Km/s}$; luego, podemos despreciar la curvatura espacio-tiempo y utilizar la geometría Euclídea del espacio; de otro modo, se debe aplicar la Teoría de la Relatividad de Einstein que excede el alcance de este curso).

Ambos miembros de la 2da ley pueden considerarse como fuerzas

- **Fuerza resultante:** Si se aplican simultáneamente varias fuerzas sobre una partícula, la Ec. 4.2 se reemplaza por

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (4.3)$$

la cual es la *Ecuación vectorial del movimiento*, donde $\sum \vec{F}$ es fuerza motriz, y es la suma vectorial o resultante de las fuerzas aplicadas. Si la resultante de las fuerzas aplicadas resultase nula $\sum \vec{F} = \vec{0}$, la aceleración es nula, significando que el cuerpo está en reposo o en movimiento (de traslación rectilíneo) a velocidad constante y corresponde al enunciado de la 1ª Ley.

- **Fuerza efectiva:** es el nombre que se le da al producto $m\vec{a}$.

4.1.2 Fuerzas de acción y reacción. Fuerza de inercia.

- **3ª Ley de Newton:** Enunciada como “*actio=reactio*”, nos indica que para cada fuerza $\vec{F}_{AB}$ ejercida por la partícula A sobre la B existe una fuerza igual y de sentido opuesto $\vec{F}_{BA}$, es decir

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (4.4)$$

Esto nos permitirá realizar una transición de las leyes para partículas, a sistemas de partículas y luego, a cuerpos rígidos.

- **Fuerzas de acción y reacción:** son las que los cuerpos se ejercen mutuamente, por contacto mutuo (través de sus superficies y vínculos) o bien a distancia (gravitacionales, eléctricas, magnéticas y provenientes de otros campos).
- **Fuerza de inercia:** Si sobre una partícula de masa m aplicamos una fuerza $\vec{F}$, éste adquiere una aceleración $\vec{a}$ tal que $\vec{F} = m\vec{a}$. Por la tercera ley, la partícula aplicará una fuerza $-m\vec{a} = \vec{F}_{in}$ denominada fuerza de inercia.

4.2 Sistemas de unidades Absoluto y Gravitatorio.

Tenemos 4 magnitudes en la 2da Ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow [F] = [M] \frac{[L]}{[T]^2}$$

de las cuales podemos elegir 3 como fundamentales o básicas y 1 como derivada de las anteriores, así formarán un **sistema consistente** de unidades cinéticas.

4.2.1 Sistema Internacional de Unidades (SI), Métrico, o Absoluto (MKS)

Surge como necesidad de definir: (i) una unidad derivada que no dependa de la magnitud del campo gravitatorio (y por ende de la ubicación terrestre), y (ii) patrones reproducibles para las unidades fundamentales

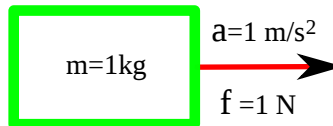


Figura 4.2: Definición de la unidad de fuerza en el SI

- Unidades básicas: **Longitud, masa y tiempo.** Medidos en metro m, kilogramo kg y segundo s. Son independientes del lugar, por ello son un sistema *Absoluto*.
- Unidad derivada: **Fuerza.** Medida en Newton N y se define como *la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 en una masa de 1kg.*

$$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (4.5)$$

Otro sistema absoluto es el CGS con unidades fundamentales el cm, el gramo g y el segundo s y se define como unidad de fuerza a la

$$1\text{ dina} = 1\text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad (4.6)$$

4.2.2 Sistema Imperial (SU), Inglés o gravitacional

Aún muy usado en norteamérica y Reino Unido (y en menor medida, en nuestro país); despejamos a la masa para poder describirlo

$$\vec{F} = m\vec{a} \therefore m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} \rightarrow [M] = [F] \frac{[T]^2}{[L]}$$

- Unidades básicas: **Longitud, fuerza y tiempo.** Medidos en pie ft, libra lb y segundo s. La gravedad depende del lugar, por ello son un sistema *Gravitatorio*. En el NIST de USA existe un patrón de platino (de masa 0,453 592 43 kg) cuyo peso define la *libra* que se mide al nivel del mar y latitud 45° , ya que la gravedad varía con la altitud y con la latitud (si ϕ es la latitud en grados, $g(\phi) = 32,09(1 + 0,0053\text{sen}^2\phi)\text{ft/s}^2$).

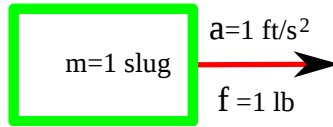


Figura 4.3: Definición de la unidad de masa en el SU

- Unidad derivada: **Masa**. Medida en slug y se define como *la masa que recibe una aceleración de 1ft/s^2 cuando se le aplica una fuerza de 1lb* .

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} \quad (4.7)$$

Otro sistema gravitatorio es el *Técnico* con unidades fundamentales el m, el kilopondio kp (kilogramo fuerza kg_f ó $\vec{\text{Kg}}$) y el segundo s, y se define a la unidad técnica de masa

$$1 \text{ utm} = \frac{1 \text{ kp}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad (4.8)$$

En Argentina, el $\vec{\text{Kg}}$ todavía es utilizado en las balanzas personales, de cocina, y de transportes de carga. Para convertirlo al SI debemos multiplicarlo por la magnitud de la gravedad, tomando $\vec{\text{Kg}} = 9,81 \text{ N}$ o aproximadamente igualándolo al decaNewton $1 \vec{\text{Kg}} \approx 10 \text{ N} = 1 \text{ dN}$.

4.3 Ecuaciones escalares del movimiento

Las formas vectoriales de las ecuaciones del movimiento $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ ofrecen una forma compacta para deducir matemáticamente y visualizar los conceptos generales y son adecuadas para la simulación computacional en problemas complejos. Para problemas simples y habiendo elegido el sistema de referencia y de coordenadas que mejor se adapta al problema, conviene utilizar las expresiones escalares.

1. **Componentes rectangulares:** De la expresión vectorial del movimiento en coordenadas Cartesianas rectangulares

$$\sum_i^n (F_x^{(i)} \hat{i} + F_y^{(i)} \hat{j} + F_z^{(i)} \hat{k}) = m (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})$$

se deducen 3 *ecuaciones diferenciales del movimiento* en forma escalar

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x = m \ddot{x} \\ \sum F_y = m a_y = m \ddot{y} \\ \sum F_z = m a_z = m \ddot{z} \end{cases}$$

que son ecuaciones independientes, es decir, en la ecuación de la coordenada x no participa la coordenada y o z ni sus derivadas.

Para el movimiento de un proyectil, las ecuaciones escalares se pueden resolver independientemente en la dirección horizontal y vertical como dos problemas, MRU y MUA respectivamente. Luego, las componentes del resultado se pueden componer para volver a la representación vectorial.

2. **Componentes naturales:** La expresión vectorial del movimiento en coordenadas naturales

$$\sum_i^n (F_t^{(i)} \hat{i}_t + F_n^{(i)} \hat{i}_n + F_b^{(i)} \hat{i}_b) = m \left(a_t \hat{i} + a_n \hat{j} + \underbrace{a_b}_{=0} \hat{k} \right)$$

conduce a 3 ecuaciones escalares diferenciales del movimiento

$$\begin{cases} \sum F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} = m\dot{s} \\ \sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \\ \sum F_b = 0 = 0 \end{cases}$$

Notamos que la primera ecuación se resuelve en forma análoga al de un movimiento rectilíneo. La segunda tiene dependencia de la velocidad que aparece en la primera. La última ecuación indica que las fuerzas binormales están en equilibrio para todo tiempo.

3. **Coordenadas polares:** De la forma vectorial

$$\sum_i^n (F_r^{(i)} \hat{i}_r + F_\theta^{(i)} \hat{i}_\theta) = m(a_r \hat{i}_r + a_\theta \hat{i}_\theta)$$

se desprenden 3 ecuaciones escalares diferenciales del movimiento que resultan *acopladas* en las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$

$$\begin{cases} \sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$$

Recordemos que por *acopladas* se entiende que las ecuaciones no se pueden resolver en forma independiente como si fuesen movimientos análogos a los rectilíneos.

En los problemas de cinética de la traslación es siempre conveniente distinguir las variables de carga y las de movimiento. Para el sistema coordenado elegido (Cartesianas, naturales, cilíndricas, polares, etc)

- La *variable de carga* es la resultante $\vec{R} = \sum \vec{F}$ o sus componentes escalares en el sistema elegido.
- La *variable de movimiento* es la función $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$ o $\vec{s}(t)$.

Asumiendo a la masa conocida en $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y conocidas las variables de carga o de movimiento surgen dos tipos de problemas de la cinética que pueden clasificarse en directo e inverso

- **Problema directo (PD):** Conocido el movimiento de la partícula, se desea determinar la fuerza que lo produjo.

Por ejemplo, si el dato es $\vec{s}(t)$, luego obtenemos $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$ y $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, finalmente calculamos $\vec{F} = m\vec{a}$.

- **Problema inverso (PI):** Conocidas las fuerzas aplicadas sobre la partícula, se desea determinar el movimiento que producen.

Por ejemplo, si el dato es $\sum \vec{F} = \vec{R}(t)$, luego calculamos $\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\vec{R}(t)$, donde:

1. Si la resultante de las fuerzas aplicadas es *constante* en el tiempo $\vec{R}(t) = \vec{R}(0)$, implica que $\vec{a} = cte$, resolvemos las ecuaciones diferenciales con facilidad.
2. Si la resultante de las fuerzas aplicadas es *variable* con el tiempo $\vec{R}(t)$, la posición $\vec{R}(s)$ o la velocidad $\vec{R}(v)$, debemos resolver cada caso específico, ya que al dividir por la masa obtendremos $\vec{a}(t)$, $\vec{a}(s)$ o $\vec{a}(v)$, respectivamente.

4.3.1 Fuerzas activas y reactivas

La segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ es *válida para un cuerpo libre* pero no para un cuerpo vinculado. Un vínculo es aquello que restringe los grados de libertad de un cuerpo. Si quito un vínculo, debo agregar al cuerpo una **fuerza que cumpla con la misma función que el vínculo**, satisfaciendo la tercera ley de Newton (Ppio. de acción y reacción) y se la denomina “reacción del vínculo” o fuerza reactiva.

En la práctica es muy común que los cuerpos estén vinculados, de modo que para que sean válidas las leyes de Newton debemos convertirlos en cuerpos libres. Analizaremos primero la clasificación de las fuerzas sobre un cuerpo que lo asumiremos vinculado

- **Fuerzas activas:** La magnitud, dirección y sentido no dependen de ninguna otra fuerza aplicada.
- **Fuerzas reactivas:** Tienen 3 características.
 1. Dependen de las fuerzas activas.

2. Si la fuerza activa se anula, la reactiva también.
3. De por sí no producen movimiento (la reacción es ortogonal al desplazamiento o movimiento permitido, no producen trabajo).

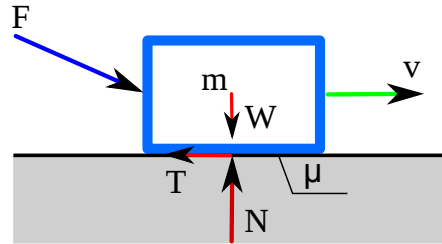


Figura 4.4: Fuerzas aplicadas sobre un cuerpo que desliza con fricción. F es una fuerza activa por contacto, $W = mg$ es una fuerza activa a distancia (gravitatoria), $N = -W$ y $T = \mu N$ son fuerzas reactivas de contacto ejercidas por el vínculo plano rugoso; con el cuerpo detenido T desaparece pero N no.

Las fuerzas reactivas se ejercen sobre un cuerpo a través de sus vínculos. Convenientemente, las reacciones de vínculo se pueden descomponer en dos direcciones características mostradas en el ejemplo de la Figura 4.4

- **Reacción normal del vínculo N :** es normal a la trayectoria o superficie de contacto.
- **Reacción tangencial del vínculo T :** es tangente a la trayectoria o superficie de contacto, normal a la reacción normal del vínculo y opuesta al desplazamiento, originando fricción del par cuerpo-vínculo y depende del tipo de superficies en contacto.

Como modelo de fricción más simple, se asume que la proporcionalidad entre la fuerza normal y la tangencial está dada por $T = \mu N$, donde μ es el coeficiente de rozamiento seco (se lo considerará independiente de la magnitud de la velocidad).

Las fuerzas reactivas pueden tener carácter estático o dinámico, por lo que enunciamos sus diferencias como

- **Reacción estática N_e :** No depende de la velocidad del cuerpo y existe aunque el cuerpo no se mueva (opuesta al peso, fuerza normal a la superficie, etc.)

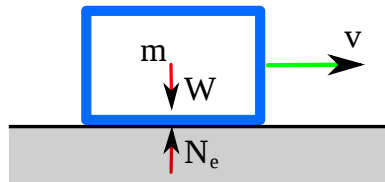


Figura 4.5: La reacción estática N_e está presente independientemente de si el cuerpo está en reposo ($v = 0$) o en movimiento ($v \neq 0$).

- **Reacción dinámica N_d :** Depende de la velocidad del cuerpo y existe cuando el cuerpo tiene una aceleración en la dirección del vínculo.

Cabe mencionar que nosotros, los seres humanos estamos sometidos a la fuerza gravitacional terrestre que nos atrae hacia el centro de la tierra y además tenemos una aceleración centrípeta debida a la rotación terrestre que agrega una reacción dinámica imperceptible pero existente. Esta reacción dinámica es más notable cuando en un vehículo tomamos la curva de una ruta. Las curvas se diseñan con una inclinación o peralte que permite que la componente en dirección centrípeta de la fuerza peso contribuya a tomar la curva en equilibrio dinámico; la reacción dinámica la proveen los neumáticos sobre el vehículo.

Cuando nos transportamos por algún medio, por ejemplo, en el movimiento unidimensional de un ascensor que está subiendo, sentimos el efecto de la reacción dinámica sobre todo en nuestras rodillas y hasta llegamos a flexionarlas para atenuar este efecto (en ascensores antiguos de movimientos bruscos). El ascensor se diseña para maximizar el confort y evitar cambios bruscos de aceleraciones; por medio

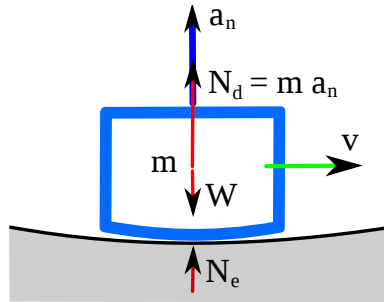


Figura 4.6: La reacción dinámica N_d está presente sólo cuando existe movimiento. En este ejemplo si el cuerpo se traslada ($v \neq 0$) debido a la trayectoria curvilínea aparece una aceleración normal $a_n \neq 0$ que produce una reacción dinámica N_d .

de controladores digitales electrónicos se puede lograr transiciones entre pisos imperceptibles. Los vehículos de transporte de pasajeros optimizan las maniobras de aceleración y frenado buscando lograr un compromiso entre maximizar el confort y cumplir los recorridos a término. Además, es perceptible por el sentido de equilibrio del ser humano, si el transporte (supongamos un colectivo) tiene un motor con caja de cambios por engranajes (motor diesel) o tiene motor eléctrico (cuya cupla de arranque es notable y luego tiene una variación continua de la velocidad)s, la transición entre

4.3.2 Diagrama de cuerpo libre (DCL)

Aislamos al cuerpo para poder aplicar las leyes de Newton en forma válida. Debemos separar la causa y el efecto y verlas claramente en un cuerpo libre aislado con fuerzas activas, reactivas y la aceleración.

1. Elegir el sistema a aislar, puede involucrar más de una incógnita.
2. Dibujar el sistema elegido con una frontera exterior que lo aisle de todos los cuerpos que le causan fuerzas a distancia o de contacto.
3. Identificar las fuerzas que se deben aplicar al sistema aislado **al quitar cada fuerza exterior**. Agregar dichas fuerzas de contacto y a distancia con su dirección, sentido y magnitud. Asumir un sentido de cada vector si el mismo es una incógnita, luego el signo de su magnitud será positivo para los sentidos asumidos correctos y negativos para los que no. Incluir el peso si es apreciable (dirección y sentido conocidos).
4. Dibujar los ejes coordenados del sistema elegido y sus signos positivos, cuyos signos deben tenerse en cuenta en las ecuaciones de las sumatorias de las fuerzas. Diferenciar con colores a los vectores de fuerza de otros vectores cinemáticos, o bien separar en dos diagramas, causas y efectos.

Ley de impulso y cantidad de movimiento

Cálculo del impulso de una fuerza
Ecuaciones escalares

Ley de trabajo y energía cinética

Trabajo finito y unidades del trabajo

Potencia en la traslación

Unidades de potencia
Trabajo de las fuerzas conservativas
Fuerzas no conservativas
Conservación de la energía mecánica
Eficiencia

Principio de d'Alembert aplicado a una partícula.

5. Leyes de la cinética en la traslación

De la 2da ley de Newton se pueden deducir otras dos leyes fundamentales: (i) La ley del impulso y de la cantidad de movimiento, y (ii) la ley del trabajo y la energía cinética. Las definiciones de las fuerzas conservativas (asociadas a un potencial) y no conservativas nos permitirán arribar a los conceptos de potencia y eficiencia.

5.1 Ley de impulso y cantidad de movimiento

Partiendo de la Segunda Ley de Newton, $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$, multiplicamos m.a.m. por dt e integramos m.a.m. desde t_1 a t_2

$$\begin{aligned}\vec{F}dt &= d(m\vec{v}) \\ \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}_{\vec{J}_{1-2}} &= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Teorema 5.1.1 — Principio del impulso y la cantidad de movimiento.

$$\vec{J}_{1-2} = \Delta\vec{L}$$

El impulso de todas las fuerzas, activas y reactivas, aplicadas a una partícula, desde un instante inicial hasta otro final, es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula.

Pasando a la cantidad de movimiento que el cuerpo tiene en el instante t_1 al primer miembro de 5.1 se obtiene

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2\tag{5.2}$$

que expresa que si se ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula durante un intervalo de tiempo dado, el momentum final $m\vec{v}_2$ de la partícula puede obtenerse sumando vectorialmente su momentum inicial $m\vec{v}_1$ y el impulso de la fuerza durante el intervalo considerado. Esto puede verse vectorialmente como lo expresa la Figura 5.1.

El método se emplea en problemas en que interviene **masa, velocidad, fuerza y tiempo**.

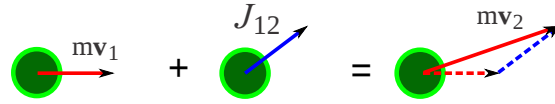


Figura 5.1: A la cantidad de movimiento mv_1 de la partícula se le suma vectorialmente el impulso J_{12} ; la resultante mv_2 determina la cantidad de movimiento final de la partícula. El dibujo es plano pero tiene validez en espacio tridimensional.

5.1.1 Cálculo del impulso de una fuerza

El impulso es una cantidad **vectorial**. En coordenadas Cartesianas rectangulares sus componentes son

$$\vec{J}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = i \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + j \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + k \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \quad (5.3)$$

y se calculan como el área bajo la curva de la componente de fuerza vs tiempo (ver Figura 5.2).

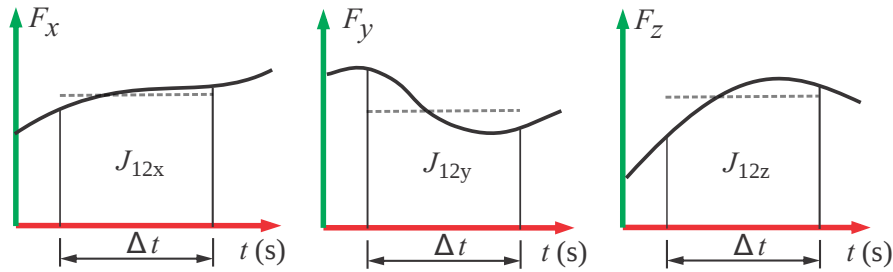


Figura 5.2: Las componentes del impulso son las integrales de las respectivas componentes de fuerzas para el intervalo de tiempo considerado.

Si la fuerza es constante, el impulso $\vec{J}_{1-2}$ tiene la dirección de la fuerza y vale $\vec{F}(t_2 - t_1)$. Si es variable, podemos usar sus valores medios en las integrales, por ejemplo para la componente en x:

$$J_{12x} = F_{mx}(t_2 - t_1).$$

Las unidades del impulso en el S.I. son

$$[J] = [F][t] = \text{Ns} = (\text{kgm/s}^2)\text{s} = \text{kgm/s} = [m][v] = [L].$$

5.1.2 Ecuaciones escalares

La ley dada por la ecuación vectorial (5.2) se puede expresar en componentes cartesianas mediante 3 ecuaciones escalares

$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2$$

$$(mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2$$

$$(mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$$

que pueden resolverse independientemente ya que están claramente desacopladas entre sí.

Otras consideraciones sobre la Ley de impulso y cantidad de movimiento a tener en cuenta:

- Si existen varias fuerzas aplicadas sobre la misma partícula en el período de t_1 a t_2

$$m\vec{v}_1 + \sum_i^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = m\vec{v}_2$$

$$m\vec{v}_1 + \sum_i^n \vec{J}_{1-2i} = m\vec{v}_2$$

- Si hay fuerzas de acción y reacción, sus impulsos se cancelan entre sí.
- Si el impulso es nulo, la cantidad de movimiento se conserva.

En capítulos posteriores veremos las aplicaciones de esta ley en sistemas de partículas y en problemas de impacto. Además, veremos el efecto rotacional del momentum lineal conocido como momentum angular y su relación con el impulso angular.

5.2 Ley de trabajo y energía cinética

El *trabajo* realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula al producirle un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ (ver Figura 5.3) es la cantidad una cantidad escalar

$$\begin{aligned} dU &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= F ds \cos \alpha, \quad |\vec{F}| = F, \quad |d\vec{r}| = ds \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde α es el ángulo mínimo incluido entre la fuerza y el vector diferencial de desplazamiento.

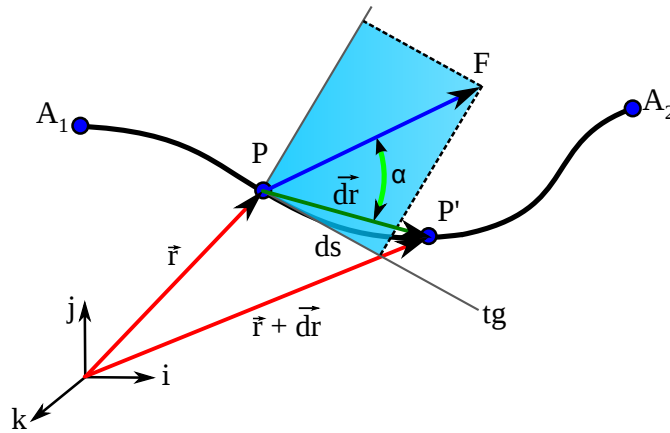


Figura 5.3: En este esquema se encuentra magnificado el desplazamiento infinitesimal en que la partícula pasa de la posición P a la P' y es, en realidad, tangente a la trayectoria en P .

Por la propia definición del producto escalar, el escalar $dU = F ds \cos \alpha$ tiene magnitud y signo:

- Si $\vec{F} \perp d\vec{r}$, $\alpha = \pi/2$, luego $dU = 0$.
- Si α es agudo, luego $dU > 0$. Es máximo positivo si $\vec{F}$ tiene igual dirección y sentido que $d\vec{r}$.
- Si α es obtuso, luego $dU < 0$. Es máximo negativo si $\vec{F}$ tiene igual dirección y sentido opuesto que $d\vec{r}$.

5.2.1 Trabajo finito y unidades del trabajo

El trabajo ejercido sobre una partícula en un desplazamiento finito (ver Figura 5.3) desde la configuración A_1 hasta la A_2 en donde las coordenadas naturales cambian de s_1 a s_2 es

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde se aprecia que *sólo la componente tangencial de la fuerza produce trabajo*.

En coordenadas Cartesianas rectangulares el trabajo diferencial es

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (5.6)$$

y el finito es

$$U_{1-2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (5.7)$$

La unidad de trabajo en el S.I. es el Joule

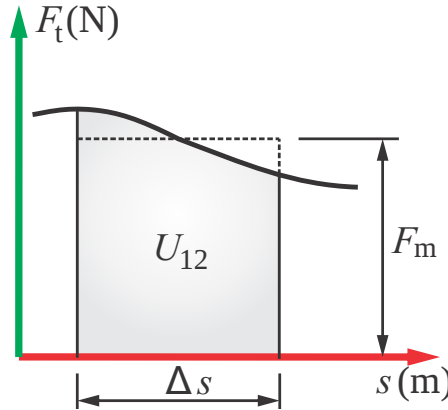
$$[U] = [F][L] = \text{Nm} = J$$

y es también una unidad de energía. La unidad de trabajo en el S.U. es la lb pie

$$[U] = [F][L] = \text{lb pie}, \text{ donde } 1 \text{ lb pie} = 1,356 J.$$

Para calcular el trabajo se debe conocer la ley de cambio de la fuerza con la posición $\vec{F}(s)$

- Si la fuerza es constante: $\vec{F}(s) = \vec{F}_0$
 $U_{1-2} = |\vec{F}_{t0}| \Delta s$, donde $\Delta s = s_2 - s_1$
- Si la fuerza es variable, $\vec{F}(s)$, se puede determinar el valor medio F_{tm} de la fuerza tangencial durante el desplazamiento:
 $U_{1-2} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F_t ds = F_{tm} \Delta s.$



Para deducir la *Ley de trabajo y energía cinética de traslación* se parte de la Ley de Newton en coordenadas naturales. El trabajo diferencial se expresa como

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \cos \alpha) ds = F_t ds \quad (5.8)$$

donde la fuerza tangencial es, en coordenadas naturales, igual a

$$F_t = m a_t = m v \frac{dv}{ds}$$

y conduce a la expresión diferencial del trabajo

$$F_t ds = m v dv$$

que reemplazada en el miembro derecho de (5.8) e integrada desde la configuración A_1 , donde $s = s_1$ y $v = v_1$, hasta la A_2 , donde $s = s_2$ y $v = v_2$ resulta en

$$\begin{aligned} \int_1^2 dU &= \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv \\ U_{1-2} &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 = \Delta T \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde al escalar definido positivo $T = \frac{1}{2} m v^2$ se lo define como la *energía cinética de traslación* de la partícula.

Teorema 5.2.1 — Principio del trabajo y la energía.

$$U_{1-2} = \Delta T$$

El trabajo de todas las fuerzas aplicadas a una partícula que se desplaza de una posición inicial a

otra final, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

El principio se aplica en problemas en que intervienen **fuerza, desplazamiento, masa y velocidad**.

Pasando la energía cinética en la configuración inicial al primer miembro de (5.9), el principio del trabajo y la energía se expresa matemáticamente como

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

y expresa que si sobre una partícula en cierta configuración inicial con una energía cinética T_1 se realiza trabajo U_{1-2} que la lleva a una segunda configuración, la energía cinética final de la partícula T_2 es la suma de su energía cinética inicial T_1 y el trabajo realizado (ver esquema en la Figura 5.4).

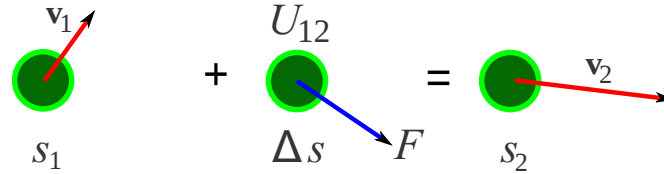


Figura 5.4: A la partícula con cierta energía cinética T_1 asociada a su velocidad $|(v)_1|$ se le realiza un trabajo U_{1-2} que le produce un cambio en su energía cinética a un valor T_2 asociada a la velocidad $|(v)_2|$. La dirección de $(v)_2$ será la tangente a la trayectoria en la configuración 2 con coordenada s_2 .

La energía cinética es **definida positiva** (la velocidad está elevada al cuadrado) y el trabajo tiene su signo. La energía cinética final es menor que la inicial si el trabajo es negativo y es mayor si el trabajo es positivo. Como ejemplos particulares, se puede analizar el caso de una partícula detenida y el caso de detener a una partícula:

- Si $v_1 = 0$ y $v_2 = v$, el trabajo positivo indica que éste se emplea para incrementar la energía cinética $U_{1-2} = T_2 = \frac{1}{2}mv^2$.
- Si $v_1 = v$ y $v_2 = 0$, el trabajo negativo indica que éste se emplea para detener a la partícula $U_{1-2} = -T_1 = -\frac{1}{2}mv^2$.

La unidad de energía cinética tiene por magnitud a

$$[T] = [M] \frac{[L]^2}{[T]^2}$$

y debe ser la misma unidad de energía utilizada para el trabajo. La unidad en el S.I. es el Joule:

$$[T] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m} = \text{N m} = J$$

Para analizar y comparar la forma de la expresión escalar de esta ley, expresamos los elementos intervinientes en forma vectorial en direcciones ortogonales y en dos sistemas de coordenadas

■ **Cartesianas:**

- $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$
- $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$
- $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

El principio se expresa como

$$\frac{1}{2}m(v_{x1}^2 + v_{y1}^2 + v_{z1}^2) + \int_1^2 \Sigma F_x dx + \int_1^2 \Sigma F_y dy + \int_1^2 \Sigma F_z dz = \frac{1}{2}m(v_{x2}^2 + v_{y2}^2 + v_{z2}^2)$$

■ **Naturales:**

- $\vec{F} = F_t \hat{t} + F_n \hat{n}$
- $d\vec{r} = ds \hat{t}$
- $\vec{v} = v \hat{t}$

El principio se expresa como

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \int_1^2 \Sigma F_t ds = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Claramente, la expresión en coordenadas naturales es más simple que en Cartesianas.

5.3 Potencia en la traslación

Si denominamos ΔU al trabajo realizado en el intervalo Δt , definimos:

Potencia media:

$$P_m = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

En el límite, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, tenemos la *Potencia instantánea*:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m = \frac{dU}{dt}$$

Teorema 5.3.1 — Potencia.

$$P = \frac{dU}{dt}$$

Es la tasa temporal a la cual se realiza trabajo.

Y para la traslación se expresa como

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad (5.10)$$

La potencia mide la rapidez con que la fuerza $\vec{F}$ convierte trabajo en energía cinética

5.3.1 Unidades de potencia

La unidad de potencia consiste de una unidad de trabajo (energía) dividida por una unidad de tiempo.

- En el S.I. se define al vatio (W) como

$$[P] = \frac{[U]}{[T]} = \text{J/s} = \text{W}$$

- En el S.U. la unidad de potencia es

$$[P] = \frac{[U]}{[T]} = \text{lb} \cdot \text{pie/s} = \frac{1}{550} \text{hp},$$

o bien $1 \text{ hp} = 550 \text{ lb} \cdot \text{pie/s}$, cuya relación se ha definido experimentalmente como sigue

Definición 5.3.1 — Horse Power. Un caballo realizaba una fuerza de 180 lb girando la rueda de un molino 144 veces por hora (2,4 veces por min). Como la rueda tenía 12 pies de radio, el caballo recorría $2,4 \cdot 2\pi \cdot 12$ pies en 1 minuto.

$$P = \frac{U}{t} = \frac{F d}{t} = \frac{180 \text{ lb} \cdot 2,4 \cdot 2\pi \cdot 12 \text{ pie}}{1 \text{ min}} = 32572 \frac{\text{lb pie}}{\text{min}} \approx 33000 \frac{\text{lb pie}}{\text{min}} = 550 \frac{\text{lb pie}}{\text{s}}$$

- En el S.T. la unidad de potencia es

$$[P] = \frac{[U]}{[T]} = \text{kp} \cdot \text{m/s},$$

pero se define como unidad de potencia al cv (cheval vapeur) donde $1 \text{ cv} = 75 \text{ kp} \cdot \text{m/s}$, y además equivale a $1 \text{ cv} = 0,9863 \text{ hp}$.

Al utilizarse como unidad de potencia el múltiplo $\text{kW} = 1000 \text{ W}$ en la generación y consumo de energía eléctrica, se ha derivado la unidad de trabajo y energía como el “kilowatt hora”: De $dU = P dt$ se deduce $[U] = [P][T] = \text{kW} \cdot \text{h}$ donde $1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$.

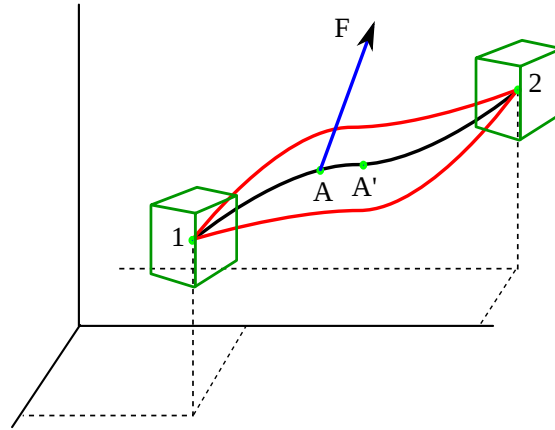


Figura 5.5: El trabajo de una fuerza conservativa es el mismo para diferentes trayectorias entre la configuración 1 y 2.

5.3.2 Trabajo de las fuerzas conservativas

Las *fuerzas conservativas* son aquellas cuyo trabajo es independiente de la trayectoria y sólo depende de la posición inicial y final (ver Figura 5.5).

Con estas fuerzas, **en una trayectoria cerrada se realiza un trabajo positivo y otro negativo que se cancelan entre sí**; matemáticamente, la integral cerrada del trabajo es nula

$$U_{1-2} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (5.11)$$

Esto ocurre si entre dos puntos de una trayectoria, el trabajo es un cambio de potencial

$$U_{1-2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

en donde $V(x, y, z)$ se llama energía potencial o función potencial de $\vec{F}$.

Si en una trayectoria de la Figura 5.5 tomamos un punto $A(x, y, z)$ y otro $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$, el trabajo elemental

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) = -dV(x, y, z) \quad (5.12)$$

es una diferencial exacta.

Usando la expresión del trabajo diferencial en coordenadas Cartesianas e igualándolo al miembro derecho de (5.12) expresado en la mismas coordenadas

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

se identifica que **la fuerza es el gradiente del potencial**

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En forma vectorial se puede expresar a la fuerza como

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

o utilizando el operador gradiente como

$$\vec{F} = -\text{grad } V = -\nabla V \quad (5.13)$$

R Las fuerzas conservativas más importantes en ingeniería son la gravitatoria, electrostática y elástica, y derivan de un potencial gravitatorio, electrostático y elástico, respectivamente.

A continuación veremos respectivamente las expresiones de trabajo y energía potencial de fuerzas conservativas más frecuentes y que utilizaremos en este curso.

Trabajo de la fuerza de gravedad

Asumimos un sistema de coordenadas Cartesiano cuya coordenada y es positiva hacia arriba del plano $x - z$. Si bien la fuerza gravitatoria está dirigida hacia el centro de la tierra, consideraremos aquí que dicha fuerza tiene dirección paralela al eje y para toda configuración, tal como se muestra en la Figura 5.6, y tiene componentes

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = 0 + (-W) \hat{j} + 0 = -W \hat{j}$$

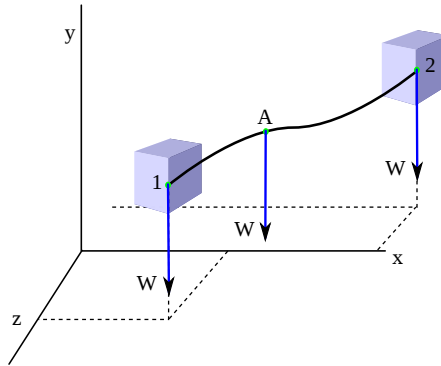


Figura 5.6: La fuerza peso se mantiene constante ante un cambio de configuración. El trabajo de esta fuerza depende del cambio de altura o desplazamiento vertical y no de las traslaciones paralelas al plano horizontal (que pueden ser producidas por otras fuerzas).

$$U_{1-2} = \int_1^2 F_y dy = \int_1^2 -W dy = -W y|_1^2 = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y$$

$$\boxed{U_{1-2} = -W \Delta y} \quad (5.14)$$

El trabajo de la fuerza peso es positivo si el cuerpo baja ($\Delta y < 0 \rightarrow U_{1-2} > 0$) y negativo si sube ($\Delta y > 0 \rightarrow U_{1-2} < 0$). El trabajo del peso no depende de la trayectoria, sólo de la altura o coordenada de posición y . Si la partícula realiza una trayectoria que retorna al punto de partida, el trabajo es nulo.

Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria V_g es la capacidad de realizar trabajo que posee el cuerpo de peso W al encontrarse a la altura y

$$\boxed{V_g = W y}$$

Reemplazando en (5.14)

$$U_{1-2} = -W(y_2 - y_1) = -(W y_2 - W y_1) = -(V_{g2} - V_{g1})$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\Delta V_g}$$

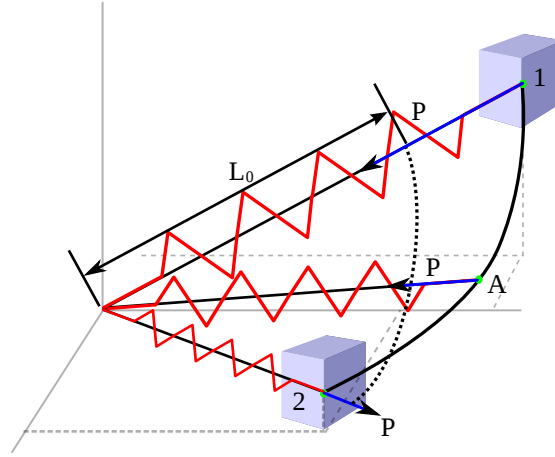


Figura 5.7: Fuerza elástica P que el resorte de longitud natural L_0 realiza sobre el cuerpo, en la configuración 1 está estirado y en la 2 está comprimido.

Trabajo de una fuerza elástica

Si denominamos $\vec{P}_e = -k \vec{x}$ a la fuerza ejercida por un resorte lineal sobre un cuerpo, como el que se muestra en la Figura 5.7, vemos que dicha fuerza es opuesta al desplazamiento $x = |\vec{x}|$ medido desde la longitud natural L_0 y tiene la dirección del resorte, donde k es la constante de rigidez del resorte lineal, medida en el S.I. en N/m.

El cuerpo reacciona contra el resorte con una fuerza $\vec{F}_e = -\vec{P}_e$ que no la consideraremos. Luego, el trabajo elemental de la fuerza elástica $\vec{F} = \vec{P}_e$ aplicada en dirección opuesta al desplazamiento es

$$\begin{aligned} dU &= F dx = -kx dx \\ U_{1-2} &= - \int_{x_1}^{x_2} kx dx \\ &= - \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_1^2 = - \left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

En el paréntesis del segundo miembro de (5.15) se saca factor común $\frac{1}{2}k$ y se factoriza como diferencia de cuadrados

$$U_{1-2} = - \left(\frac{1}{2} \underbrace{k(x_2 + x_1)}_{(F_2 + F_1)} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\Delta x} \right).$$

Luego, usando que el resorte es lineal, $F_1 = kx_1$ y $F_2 = kx_2$, se obtiene

$$U_{1-2} = - \frac{1}{2} (F_1 + F_2) \Delta x$$

que expresa que el trabajo es igual al área bajo la curva fuerza desplazamiento en el intervalo dado. Nuevamente, el trabajo de la fuerza elástica no depende de la trayectoria.

Energía potencial elástica

La energía potencial elástica V_e es la capacidad de realizar trabajo que posee la fuerza elástica P_e debido a la deformación x del resorte

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2.$$

Si se mantiene fija la deformación, el resorte (estirado o acortado) posee energía almacenada. Reemplazando esta expresión de energía potencial elástica en (5.15) se obtiene

$$U_{1-2} = - \left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right) = -(V_{e2} - V_{e1})$$

$$U_{1-2} = -\Delta V_e$$

Si se estira o acorta al resorte alejándolo de la longitud neutra, el trabajo de la fuerza elástica es negativo y aumenta la energía potencial, si se lo acerca a la longitud neutra, el trabajo es positivo y su energía potencial disminuye.

Unidades de energía potencial

En el S.I. la energía se mide en Joule:

- La energía potencial gravitatoria $[V_g] = [W][x] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$.
- La energía potencial elástica $[V_e] = [k][x]^2 = (\text{N/m}) \cdot \text{m}^2 = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$.

5.3.3 Fuerzas no conservativas

Las fuerzas **no conservativas** o **disipativas** son aquellas cuyo trabajo depende de la trayectoria que efectúa la partícula desde la posición inicial a la final, matemáticamente se cumple que su trabajo en una trayectoria cerrada no se anula

$$U_{1-2} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0.$$

y estas fuerzas sólo realizan trabajo negativo produciendo una disipación de energía.

Las más importantes son las de rozamiento o fricción:

1. *Fuerza de rozamiento seco entre dos cuerpos*: Es independiente de la posición y velocidad si la superficie de contacto es plana, puede no serlo si es curvada. Es proporcional a la fuerza de contacto normal

$$F = \mu N.$$

2. *Fuerza del cuerpo con un fluido de alta viscosidad, baja velocidad y flujo laminar*, es proporcional a la velocidad

$$F \approx c v.$$

3. *Fuerza del cuerpo con un fluido de baja viscosidad, alta velocidad y flujo turbulento (torbellinos)*, es proporcional al cuadrado de la velocidad

$$F \approx c v^2.$$

Por ejemplo, las fuerzas en carrocería de vehículo debido a la interacción con el aire (auto, avión, etc); ver Figura 5.8.



Figura 5.8: Las fuerzas disipativas son inevitables y se deben utilizar racionalmente con diversos propósitos. El ala de un avión tiene una forma tal que al ser propulsada hacia adelante produce una diferencia de presiones entre el flujo superior e inferior de modo que la fuerza resultante sobre el ala tenga una componente de sustentación (*lift*) que supere (para elevarse) o iguale (para mantenerse a altura constante) al peso y una componente de arrastre (*drag*) que tenga mínima oposición al empuje o propulsión de los motores. En alerones traseros de vehículos terrestres (de competición) la dirección de la fuerza de sustentación deseada es hacia abajo, evitando que el vehículo despegue del suelo por efectos aerodinámicos.

5.3.4 Conservación de la energía mecánica

La *energía potencial total* es la suma de las energías potenciales (gravitatoria, elástica, y electrostática) en cierta configuración

$$V = V_g + V_e + V_E.$$

Dado que trabajo puede obtenerse como un cambio de energía potencial total o por un cambio de energía cinética:

- el trabajo de las fuerzas conservativas es igual al cambio de energía potencial total

$$U_{12}^{\text{conserv.}} = -(V_2 - V_1) = -\Delta V,$$

- el trabajo de todas las fuerzas, **activas y reactivas, conservativas y no conservativas, con potencial conocido o no**, es igual al cambio de energía cinética

$$U_{12} = U_{12}^{\text{conserv.}} + U_{12}^{\text{no conserv.}} = T_2 - T_1 = \Delta T,$$

si sólo existen fuerzas conservativas ($U_{12}^{\text{no conserv.}} = 0$), se pueden igualar ambas expresiones del trabajo conservativo y juntar en un mismo miembro las energías para igual configuración

$$U_{12}^{\text{conserv.}} = T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1) \rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

en donde la suma de la energía cinética y la energía potencial en una misma configuración i es denominada *energía mecánica total*, $E_i = T_i + V_i$. Luego, se obtiene que en presencia de fuerzas conservativas (activas y reactivas) la energía mecánica total se conserva

$$\underbrace{T_1 + V_1}_{E_1} = \underbrace{T_2 + V_2}_{E_2} = E_1 = E_2 = \text{cte} \quad (5.16)$$

La ley de conservación de la energía mecánica es sólo aplicable si las fuerzas disipativas son despreciables y permite realizar cálculos preliminares, ideales o iniciales para procesos de transformación de energía. Permite resolver problemas en que intervienen **masa, velocidad, fuerza, y posición/desplazamiento/deformación**.

5.3.5 Eficiencia

El trabajo no es una forma de energía, es un proceso mecánico por el cual una forma de energía se transforma en otra. En todo proceso de transformación de energía es inevitable que aparezcan **fuerzas disipativas** realizando trabajo negativo, luego, la energía inicial no será igual a la final, por lo tanto **la energía mecánica total no se conserva**

$$\underbrace{T_1 + V_1}_{E_{\text{Entrada}}} > \underbrace{T_2 + V_2}_{E_{\text{Salida}}}$$

La *eficiencia* o *rendimiento* de un proceso de transformación de energía es el cociente entre la energía de salida y la de entrada o suministrada

$$\eta = \frac{\underbrace{E_S}_{\text{Energía}}}{\underbrace{E_E}_{\text{Energía}}} = \frac{\underbrace{U_S}_{\text{Trabajo}}}{\underbrace{U_E}_{\text{Trabajo}}} = \frac{\underbrace{P_S}_{\text{Potencia}}}{\underbrace{P_E}_{\text{Potencia}}} \quad 0 < \eta < 1$$

e idénticamente, considerando un mismo lapso de tiempo, es el cociente entre la potencia de salida y la de entrada.

En la realidad siempre existen fuerzas no conservativas y la eficiencia es menor que 1. Para elegir una máquina, la potencia y eficiencia son muy importantes. Por ejemplo, en un hogar es común tener que elegir la eficiencia cuando compramos un electrodoméstico A, B, C, D , por ejemplo un aire acondicionado. Luego observaremos que un aire acondicionado tipo A es más silencioso y consume menos energía durante un mes que uno tipo D para igual producción de frío o calor. Los índices de bajas vibraciones y ruido también están asociadas a menores pérdidas de energía y mayor eficiencia en la conversión de la misma, ya sea al considerar un motor eléctrico o una turbina de vapor de una central térmica.

5.4 Principio de d'Álembert aplicado a una partícula.

Si en la segunda Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, trasponemos el miembro derecho y la reescribimos como una ecuación implícita, obtenemos el Principio de d'Álembert (ver Figura 5.9)

$$\boxed{\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}} \quad (5.17)$$

que expresa que la sumatoria de fuerzas está en equilibrio (dinámico) con el vector $-m\vec{a}$. El vector $-m\vec{a}$ es colineal y opuesto a $\vec{a}$, y se lo llama **fuerza de inercia**, no es una fuerza real. La partícula sujeta a fuerzas y vectores de inercia está en **equilibrio dinámico**; es un equilibrio ficticio porque el movimiento es acelerado.

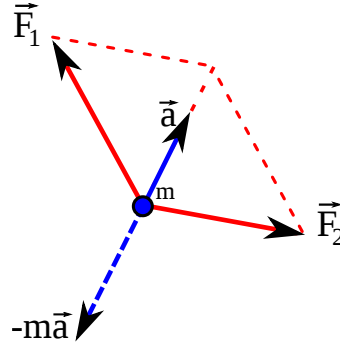


Figura 5.9: Si sumamos el vector de inercia (en trazos) a las fuerzas que actúan, obtenemos un sistema de vectores equivalente al vector nulo.

El sistema de vectores (5.17) se puede resolver por métodos de estática y la forma implícita

$$\overrightarrow{r(x, v)} = \sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

es útil para aplicar métodos numéricos iterando adecuadamente sobre las variables, x y v , hasta que el residuo $\overrightarrow{r(x, v)}$ sea suficientemente pequeño, es decir, $|\overrightarrow{r(x, v)}| < \epsilon_{\text{Tot}}$.

En partículas vinculadas a rotar en una circunferencia, la aceleración tiene una componente que es siempre centrípeta (puede tener además, una tangencial), por lo tanto la fuerza efectiva asociada es centrípeta. La fuerza de inercia opuesta a la componente de fuerza centrípeta es la llamada fuerza centrífuga. Supongamos que la partícula tiene movimiento angular constante de modo que la aceleración sólo tiene componente centrípeta, si el vínculo se libera, la partícula tendrá movimiento en dirección tangencial a la trayectoria, en línea recta y a velocidad constante y *no tendrá la dirección de la fuerza centrífuga*, la cual es ficticia. Similarmente, si el ala de un aerogenerador se desprende al pasar por su punto más alto, la misma no saldrá lanzada en dirección radial hacia arriba por efecto de la fuerza centrífuga sino que tendrá una dirección tangencial y recuperará, instantáneamente, un movimiento rectilíneo debido a su velocidad tangencial.

Movimiento relativo en traslación

Posición relativa
Desplazamiento relativo
Velocidad relativa
Aceleración relativa

Movimiento rectilíneo de partículas vinculadas

Ejemplo de transporte de carga de un grado de libertad.

Resolución de la cinemática de sistemas de poleas

Movimiento de partículas sobre trayectorias curvilíneas.

(*) Movimiento relativo de partículas en marco móvil rotante

6. Movimientos relativos

6.1 Movimiento relativo en traslación

Consideremos partículas con movimiento de traslación, libres o vinculadas, formando un sistema reducible a varios diagramas de cuerpo libre en donde se pueda aplicar la 2da Ley de Newton. Como elementos vinculantes veremos el caso de cables y poleas.



El movimiento de cuerpos reducidos a partículas puede ser:

1. Unidimensional: Puede ser rectilíneo ó curvilíneo definido por una única coordenada. Muchos problemas se pueden idealizar como partícula, por ejemplo: traslado de cargas en plano inclinado, o verticalmente como en un montacarga, ascensor o grúa.
2. Bidimensional: Plano o definido por 2 coordenadas, es decir, restringido a una superficie. Ejemplos: planeamiento de trayectoria de vehículo terrestre (también en la Luna o Marte) o acuático en una superficie conocida.
3. Tridimensional: Ocurren en el espacio 3D y está definido por 3 coordenadas en sistemas adecuados. Ejemplos: polipastos o aparejos para manejo de materiales, suspensión de vehículo terrestre, guiado por coordenadas de vehículos aéreos (ignorando hacia a donde apuntan, como puede ser el caso de los cuatrirrotores que trasladan una carga).

En cuerpos rígidos se estudian movimientos relativos más complejos cuando están vinculados por pares cinemáticos, etc. Los mecanismos planos y espaciales tienen, entre sus partes, movimientos relativos definidos por sus vínculos cinemáticos.

El movimiento de cada partícula con respecto a un *sistema fijo de referencia* se denomina *movimiento absoluto de la partícula* y su movimiento con respecto a cualquier *sistema móvil de referencia* se denomina *movimiento relativo de la partícula*.

6.1.1 Posición relativa

Dos partículas A y B están en movimiento sobre una recta con origen O y sentido positivo hacia la derecha como muestra la Figura 6.1; las divisiones tienen magnitudes de longitud en cierto sistema de unidades. Las *coordenadas absolutas de posición* son respectivamente s_A y s_B .

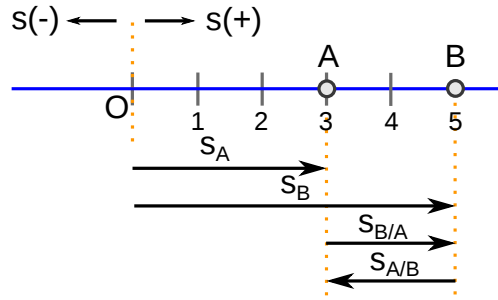


Figura 6.1: Vectores de posición relativa entre dos partículas.

Se define a la *coordenada de posición relativa* de B con respecto a A (A con respecto a B) como la diferencia $s_B - s_A = s_{B/A}$ ($s_A - s_B = s_{A/B}$). De estas expresiones se deduce que

$$s_{A/B} = s_{B/A} \quad (6.1)$$

Conociendo la posición absoluta de A (B) es posible determinar la posición absoluta de B (A) usando la coordenada de posición relativa de B con respecto a A (A con respecto a B)

$$s_B = s_A + s_{B/A} \quad \left(s_A = s_B + s_{A/B} \right) \quad (6.2)$$

6.1.2 Desplazamiento relativo

Dos partículas A y B se mueven sobre una recta con origen O , en un lapso de tiempo $\Delta t = t' - t$ como muestra la Figura 6.2.

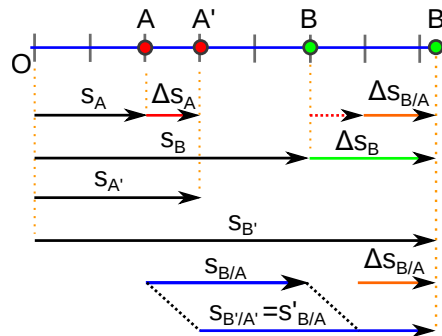


Figura 6.2: Desplazamientos absolutos y relativos entre dos partículas.

La diferencia entre las coordenadas absolutas en el instante final t' y el inicial t de cada partícula define el *desplazamiento absoluto* de las mismas como $\Delta s_A = s'_A - s_A$ y $\Delta s_B = s'_B - s_B$.

El *desplazamiento relativo* entre dos partículas se puede calcular como la diferencia de desplazamientos absolutos de las partículas

$$\Delta s_{B/A} = \Delta s_B - \Delta s_A \quad (6.3)$$

ó en términos de las posiciones relativas en el instante inicial $s_{B/A} = s_B - s_A$ y el final $s'_{B/A} = s'_B - s'_A$:

$$\begin{aligned}\Delta s_{B/A} &= \Delta s_B - \Delta s_A = s'_B - s_B - (s'_A - s_A) \\ &= \underbrace{(s'_B - s'_A)}_{s'_{B/A}} - \underbrace{(s_B - s_A)}_{s_{B/A}}\end{aligned}$$

y se obtiene

$$\Delta s_{B/A} = s'_{B/A} - s_{B/A} \quad (6.4)$$

Los vectores que se calculan mediante ambas ecuaciones, (6.3) y (6.4), se ilustran en la Figura 6.2.

6.1.3 Velocidad relativa

Dos partículas A y B se mueven sobre una recta, con origen O , en un lapso de tiempo infinitesimal $dt = t' - t$ y tienen un desplazamiento relativo infinitesimal $ds_{B/A} = ds_B - ds_A$. Luego, la velocidad relativa instantánea se puede expresar en términos de las velocidades absolutas como:

$$\begin{aligned}\frac{ds_{B/A}}{dt} &= \frac{ds_B}{dt} - \frac{ds_A}{dt} \\ v_{B/A} &= v_B - v_A\end{aligned} \quad (6.5)$$

donde $v_{B/A}$ es la velocidad relativa de A con respecto a B . Conociendo ésta y la velocidad absoluta de A , v_A se puede calcular la velocidad absoluta de B

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (6.6)$$

Idénticamente, se calculan $v_{A/B} = v_A - v_B$ y $v_A = v_B + v_{A/B}$. Además, se cumple que

$$v_{B/A} = -v_{A/B} \quad (6.7)$$

6.1.4 Aceleración relativa

De igual modo, la aceleración relativa se obtiene por diferencia de las aceleraciones absolutas.

$$\begin{aligned}\frac{dv_{B/A}}{dt} &= \frac{dv_B}{dt} - \frac{dv_A}{dt} \\ a_{B/A} &= a_B - a_A\end{aligned} \quad (6.8)$$

donde $a_{B/A}$ es la aceleración relativa de A con respecto a B . Conociendo ésta y a_A

$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (6.9)$$

Idénticamente: $a_{A/B} = a_A - a_B$ y $a_A = a_B + a_{A/B}$, Además, se cumple que

$$a_{B/A} = -a_{A/B} \quad (6.10)$$

6.2 Movimiento rectilíneo de partículas vinculadas

Cuando dos o varias partículas están vinculadas, por ejemplo mediante cuerdas ideales inextensibles y poleas formando sistemas de poleas:

- Sus movimientos son geoméricamente dependientes.
- Su estática y cinética también resulta afectada.
- La fricción es despreciable para un número bajo de poleas (3 a 4).

Para los ingenieros eléctricos y mecánicos es de gran importancia identificar la ventaja mecánica en aparatos de izar ya sea para diseñar la estructura o para seleccionar un motor que los accione.

Los aparatos de izar se han utilizado por largo tiempo para **multiplicar** la fuerza de accionamiento para elevar un peso (o bien, para **dividir** la carga o peso), en general, recurriendo a un aumento del



Figura 6.3: A la izquierda se muestra un aparejo o polipasto de accionamiento manual utilizado en náutica y que permite elevar cargas como botes livianos. A la derecha se muestra un aparejo similar montado sobre una grúa y accionado por un motor.

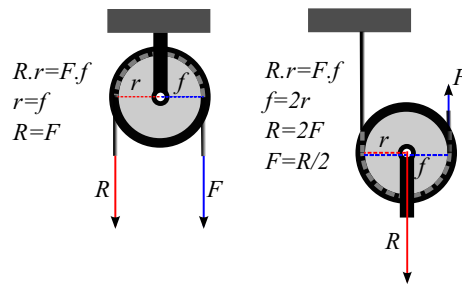
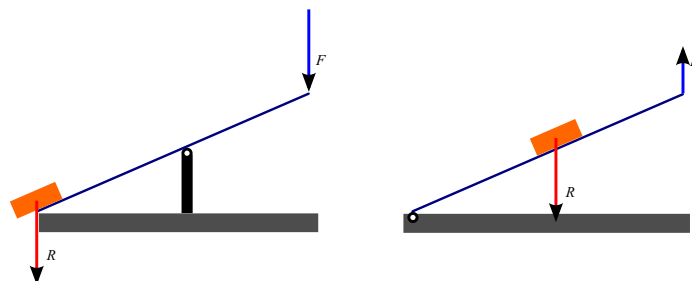


Figura 6.4: Equilibrio de momentos en la polea fija y la móvil. En la polea fija el brazo de momento de la fuerza y la resistencia son iguales. En la polea móvil el brazo de fuerza es el doble que el brazo de resistencia, por ello la equilibra con la mitad de su valor.

desplazamiento. Los sistemas de poleas pueden estar formados por *poleas simples* que sólo cambian la dirección de la fuerza y por *poleas móviles* de cuyo centro pende una carga o el cable de otra polea móvil. Cada polea móvil divide a la mitad a la carga sobre su centro y el cable que envuelve dicha polea se desplaza el doble de lo que se desplaza el cable que pende del centro. Es común que se utilicen de 3 a 4 poleas móviles y el limitante es la fricción.

La diferencia conceptual entre la cinemática y la cinética de un polea fija y la móvil es análogo a un sistema de palanca con un pivot en el centro y otro con un pivot en el extremo.



La “Ventaja mecánica” de una máquina o mecanismo es la relación entre la fuerza de salida R (resistencia) y la fuerza de entrada F o de accionamiento

$$V_M = \frac{R}{F}$$

e indica cuantas veces la máquina multiplica a la fuerza de accionamiento $R = V_M F$ (o divide a la carga $F = R/V_M$).

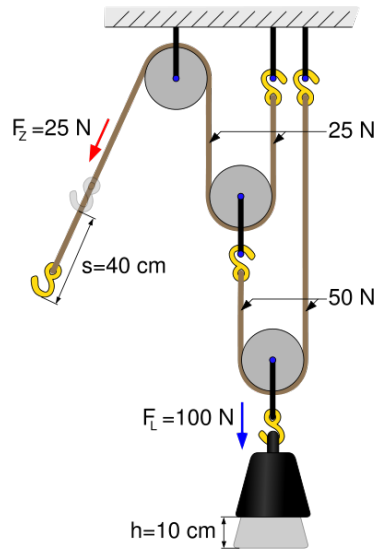


Figura 6.5: Aparejo compuesto o potencial

En el ejemplo mostrado en la Figura 6.5, se requiere de un trabajo de $100\text{ N} \cdot 0,1\text{ m} = 10\text{ J}$ para elevar el peso.

- Si lo eleváramos con una polea simple únicamente, la fuerza y el desplazamiento necesarios serían los mismos que los de la carga, $V_M = 1$, pero con una dirección más cómoda para una persona, quien puede ayudarse de su peso propio si la carga es grande.
- Al colocar una polea móvil, la carga se divide en dos partes, una se transforma en una reacción en el techo y la otra se traslada al sistema siguiente, la polea móvil tiene una $V_M = 2$, es decir, la fuerza requerida sería $F = R/V_M = R/2$, es decir, de 50 N.
- Agregando otra polea móvil a continuación, la fuerza requerida sería $F = (R/2)/2 = R/(2 \cdot 2) = R/4$, o sea, de 25 N.

Para n poleas móviles consecutivas la fuerza requerida es

$$F = \frac{R}{2^n}. \quad (6.11)$$

La ventaja mecánica aumenta en potencias de 2 con el número de poleas. Por ello, al sistema se lo denomina *aparejo potencial*. Las fuerzas en las cuerdas internas del aparejo se van reduciendo a la mitad.

Otra configuración muy utilizada es la de colocar poleas en serie de modo que las cuerdas internas del aparejo y la del accionamiento realicen todas la misma fuerza, ya que utilizan una cuerda única. Al sistema obtenido se lo denomina *aparejo factorial*. La fuerza requerida es

$$F = \frac{R}{n}$$

siendo n el número de poleas, coincide con el número de cuerdas internas del aparejo y con la ventaja mecánica $V_M = n$.

Esta construcción permite disminuir la complejidad del diseño notablemente ya que las poleas del conjunto superior e inferior mostrado en la Figura 6.6 se pueden montar sobre ejes en común, uno fijo superior y otro móvil inferior, como muestra la Figura 6.3-(izq.) con el aparejo de uso náutico.

En todos estos casos hay que tener en cuenta que la energía no se conserva y el trabajo realizado para elevar el peso no es igual al trabajo que hay que realizar sobre el extremo móvil de la cuerda. Como existen fuerzas disipativas debido a la fricción, el trabajo requerido de accionamiento es ligeramente superior al trabajo realizado sobre el peso.

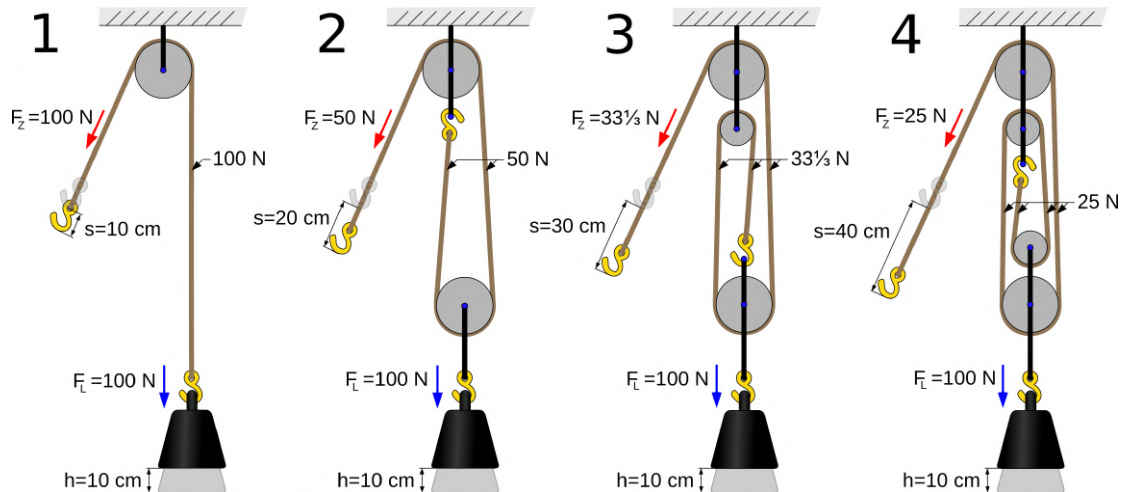


Figura 6.6: El aparejo factorial está caracterizado, principalmente, por tener una cuerda única.

6.3 Ejemplo de transporte de carga de un grado de libertad.

En el siguiente ejemplo, mostrado en la Figura 6.7, se procede a levantar un objeto A por un plano inclinado utilizando un motor eléctrico M .

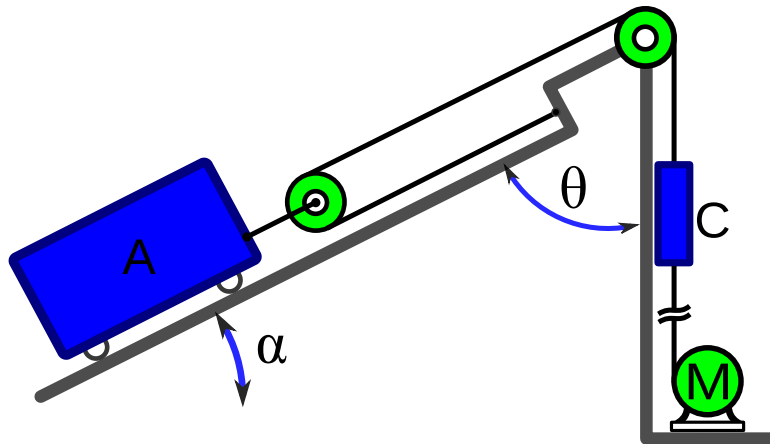


Figura 6.7: Sistema de elevación eléctrico formado por una carga A , un plano inclinado, un sistema de polea móvil, un contrapeso C y un motor M .

Con el objetivo de disminuir la potencia del motor, se reduce a la fuerza de accionamiento:

- Agregando ruedas al carro que lleva la carga A , de modo tal de eliminar la fricción.
- Al inclinar el plano en un ángulo θ permite elevar una carga A , de peso W_A , realizando trabajo paralelo al plano, venciendo solamente la componente de fuerza $W_A \parallel = W_A \cos(\theta) = W_A \sin(\alpha)$ (si se elevara con una polea simple y un plano vertical, la fuerza de accionamiento debería ser igual al peso de la carga); la fuerza se *reduce* según $\cos(\theta)$.
- El cable permite cambiar la dirección de la fuerza de tracción a vertical sin cambiar la magnitud.
- Incluyendo una polea móvil que *divide* a la mitad la componente del $W_A \parallel$ y es, por consiguiente, igual a la fuerza vertical antes del contrapeso. Veremos luego que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son la mitad que la del cuerpo A sobre el plano inclinado.
- Aprovechando la energía potencial gravitatoria del contrapeso W_C , su peso *resta* fuerza a la requerida en el motor en un valor de W_C , reduciendo la potencia del motor.

6.3.1 Resolución de la cinemática de sistemas de poleas

En un sistema de poleas hay que considerar que

- La longitud total del cable no cambia, es constante.
- Los tramos de cable que envuelven a las poleas son constantes.
- El número de coordenadas independientes define los grados de libertad del sistema.

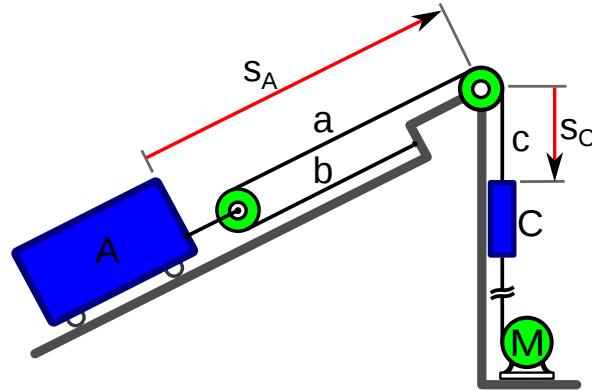


Figura 6.8: Coordenadas y grados de libertad del sistema de poleas

Con estas consideraciones se puede realizar el análisis cinemático en dos pasos:

- A) Configuración inicial a tiempo t : Definida por la posición, una coordenada de posición por cuerpo rígido y extremo de cable si está conectado a centro de polea.
- B) Configuración a tiempo t' , determinar desplazamiento y derivar para obtener velocidad y aceleración.

Retornando al ejemplo de la Figura 6.8, se han seleccionado 3 tramos variables de cuerda, con a , b y c , y dos coordenadas s_A y s_B ; queremos conocer cuántas de estas coordenadas son independientes para determinar los grados de libertad:

- A) Configuración inicial (a tiempo t): Considerando $L = a + b + c + cte1$

$$\text{Cuerpo A: } s_A = a + cte2$$

$$s_A = b + cte3$$

$$\text{Cuerpo C: } s_C = c$$

(6.12)

$$\text{Sumo m.a.m: } 2s_A + s_C = a + b + c + cte2 + cte3 = cte$$

Sumamos miembro a miembro lo de una misma cuerda (si hay más cuerdas queda un sistema de ecuaciones) y se obtiene

$$s_C = -2s_A + cte$$

(6.13)

Como quedó una coordenada en función de sólo otra coordenada, el sistema tiene 1 grado de libertad.

- B1) Configuración a tiempo t' :

$$s'_C = -2s'_A + cte$$

(6.14)

- B2) Desplazamiento: Le restamos miembro a miembro la descripción cinemática de (6.14) (a tiempo t) de la ecuación (6.13) (a tiempo t')

$$s'_C - s_C = -2s'_A - (-2s_A) = -2(s'_A - s_A)$$

$$\Delta s_C = -2 \underbrace{\Delta s_A}_{1G.D.L.}$$

$$ds_C = -2ds_A$$

Luego, derivando con respecto al tiempo a ambos miembros se obtienen las relaciones de velocidad

$$v_C = -2v_A$$

(6.15)

y, derivando otra vez, las de aceleración

$$\boxed{a_C = -2a_A} \quad (6.16)$$

Este procedimiento es válido para una gran variedad de sistemas de poleas. En la literatura se pueden hallar metodologías más abreviadas y basadas en los mismos fundamentos. Si hubiésemos partido de la ecuación (6.12) para una cuerda

$$2s_A + s_C = cte \quad (6.17)$$

luego, por derivación con respecto al tiempo se obtiene la velocidad

$$2v_A + v_C = 0 \quad (6.18)$$

y derivando nuevamente, se obtiene la aceleración

$$2a_A + a_C = 0 \quad (6.19)$$

obteniéndose las mismas relaciones cinemáticas (6.15) y (6.16).

6.4 Movimiento de partículas sobre trayectorias curvilíneas.

Dado un sistema de partículas libres, A y B , que se mueven sobre trayectorias curvilíneas en el espacio tridimensional como el que se muestra en la Figura 6.9.

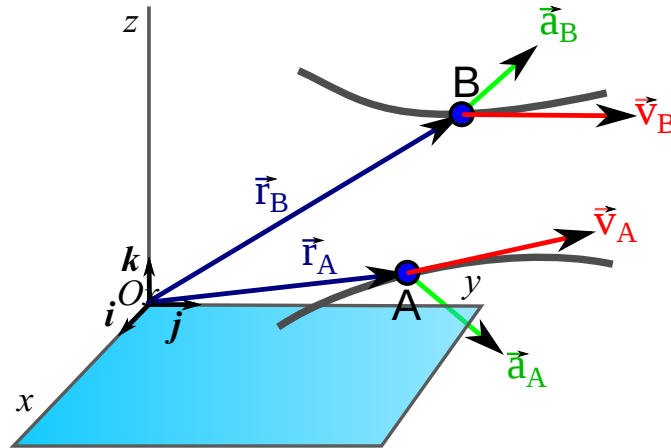


Figura 6.9: Descripción del movimiento traslacional de dos partículas

En el instante t , $\vec{r}_A$ es la posición absoluta de A y $\vec{r}_B$ es la posición absoluta de B , con respecto a un mismo marco fijo.

La posición relativa de B con respecto a A es:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (6.20)$$

y se dirige de A hacia B como se muestra en la Figura 6.10. Conocida la cinemática de la partícula A , se puede determinar la cinemática de B utilizando la posición relativa de B con respecto a A :

$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}} \quad (6.21)$$

El vector de posición relativa de B con respecto a A , $\vec{r}_{B/A}$, se expresa en componentes de un sistema de referencia móvil fijo a la partícula A , $A-x'-y'-z'$ y sus versores son paralelos a los del marco $O-x-y-z$. La derivada de los versores en ese marco móvil es nula, entonces el vector velocidad relativa se obtiene como

$$\vec{r}_{B/A} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \rightarrow \vec{v}_{B/A} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' \quad (6.22)$$

y también se puede obtener derivando la (6.20) sucesivamente:

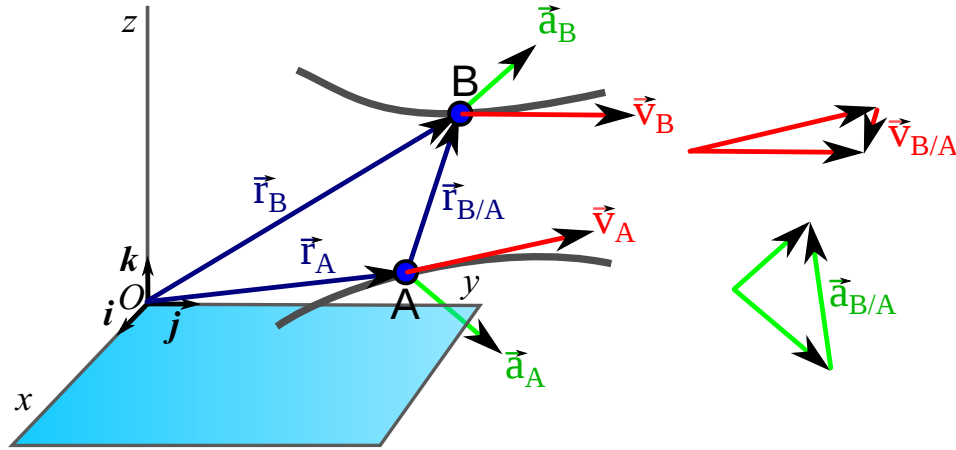


Figura 6.10: Descripción de la cinemática relativa traslacional de dos partículas

- Velocidad relativa de B con respecto a A:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \therefore \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}} \quad (6.23)$$

- Aceleración relativa de B con respecto a A:

$$\vec{a}_{B/A} = \frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \therefore \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}} \quad (6.24)$$

Esto es válido para partículas y cuerpos en traslación pura. Si el marco rota como ocurre en cuerpos rígidos, hay que afectar a las derivadas por el término de Coriolis. Para cada vector $(\bullet) = \vec{u}(t)$ dependiente del tiempo, la derivada es:

$$\frac{d(\bullet)}{dt_A} = \frac{d(\bullet)}{dt_B} + \vec{\omega}_{B/A} \times (\bullet) \quad (6.25)$$

donde $\vec{\omega}_{B/A}$ es la velocidad angular relativa del marco rotante B con respecto a un marco fijo A.

6.5 (*) Movimiento relativo de partículas en marco móvil rotante

Esta sección marcada con (*) utiliza conceptos que se verán en la cinética de la rotación y debe ser revisada luego de ver dicha unidad. Aquí se presenta un ejemplo en donde el marco rotante tiene gran importancia en la simulación y en el control. Se considera:

- Un marco inercial O fijo a la tierra.
- Un marco móvil B asociado a un vehículo. Equilibrio rotacional.
- Momentos de inercia I en ejes principales del vehículo
- La velocidad angular del vehículo es $\omega_{B/O} = \omega$ es la del marco del cuerpo relativa al marco fijo.

Para el cálculo del torque a aplicar se debe emplear la fórmula de Coriolis al derivar con respecto al tiempo el momento cinético. Junto con la fuerza a aplicar y un mapeo específico se pueden determinar las velocidades de rotación de los 4 motores para efectuar un movimiento planificado.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d(I\omega)}{dt_O} = \frac{d(I\omega)}{dt_B} + \vec{\omega}_{B/O} \times (I\omega) \\ &= I \frac{d(\omega)}{dt_B} + \vec{\omega}_{B/O} \times (I\omega) = I \frac{d(\omega)}{dt_B} + \omega \times (I\omega) \end{aligned}$$

Existe un gran número de mecanismos y máquinas que se consideran cuerpos rígidos vinculados (Multi-body Systems) y son de importancia para ingenieros eléctricos:

- Movimiento relativo del sol con respecto a la tierra, en diversas ubicaciones terrestres y día del año

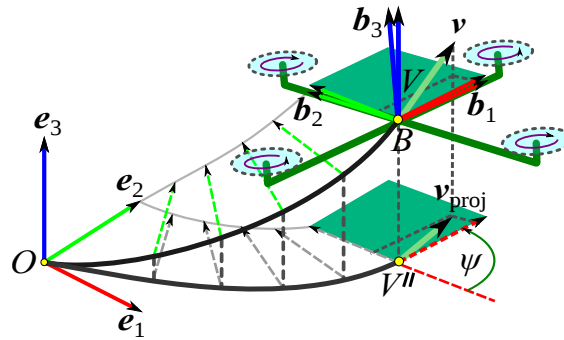
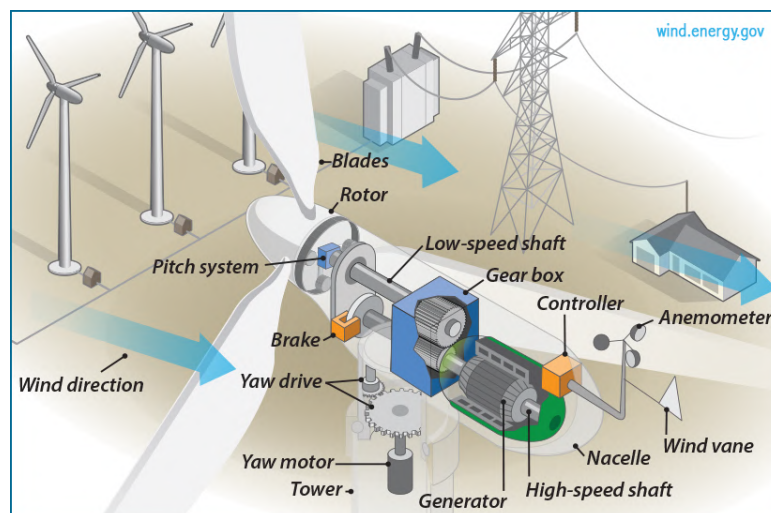


Figura 6.11: Cinemática de un vehículo aéreo cuadrirotor



- Guiado de concentradores de hornos solares y paneles solares; ver Figura 6.5
- Mecanismos en generadores eólicos con transmisión por engranajes:
- Son robustos y requieren de mantenimiento. En algunos países están funcionando hace 20 años.
 - Aerogen. 1 MW: de 15 a 20 r.p.m $\rightarrow$ 1800 r.p.m. en generador



Mecanismos en generadores eólicos con transmisión **direct-drive**:

- IMPSA-Wind (Argentina), NORTHERN (USA), GOLDWIND (USA), SIEMENS (Alemania).
- Eliminan el contacto y fricción de la transmisión reduciendo pérdidas mecánicas: Menor mantenimiento mecánico (ideal para offshore). ¿Menor peso?
- Mayor costo en el generador sincrónico de **imanes permanentes** (veloc. variable / conversión electrónica). Balance con pérdidas por calor en dispositivos electrónicos?

IMPSA Wind eligió para sus turbinas eólicas la tecnología más novedosa, confiable y eficiente: DDPM WEC (Direct Drive Permanent Magnet – Wind Energy Converter).

Las turbinas de IMPSA Wind se producen en tres potencias: 1,5 MW, 2,0 MW o 2,1 MW.

Principales características:

- Turbina acoplada directamente, sin caja multiplicadora de velocidad, que aumenta la eficiencia y disminuye la necesidad de mantenimiento.
- Generador multipolo, velocidad variable, con excitación por imanes permanentes; alta eficiencia y bajo mantenimiento. No consume potencia reactiva.
- Control del sistema inversor con salida SVPWM (Space Vector Pulse Width Modulation), IGBTs para controlar la tensión, la corriente, el factor de potencia y la frecuencia.

Dentro de este concepto IMPSA trabaja con sus propios modelos de equipos IMPSA - UNIPOWER®:

- UNIPOWER® minimiza las desventajas de las configuraciones tradicionales de los generadores de transmisión directa (tamaño y peso), pero mantiene su ventaja principal (sin caja multiplicadora).
- UNIPOWER® fusiona en un solo componente las funciones tradicionales del generador eléctrico y el cubo rotor, que minimiza las partes activas y reduce las pérdidas y tiempos muertos por mantenimiento.
- UNIPOWER® utiliza imanes permanentes y control de potencia por paso de palas, optimizando la recolección de energía a distintas velocidades de viento.

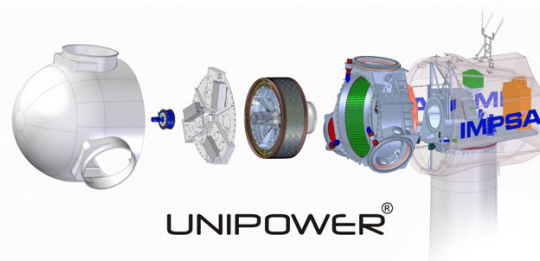


Figura 6.12: Ventajas de un generador direct-drive de industria nacional.

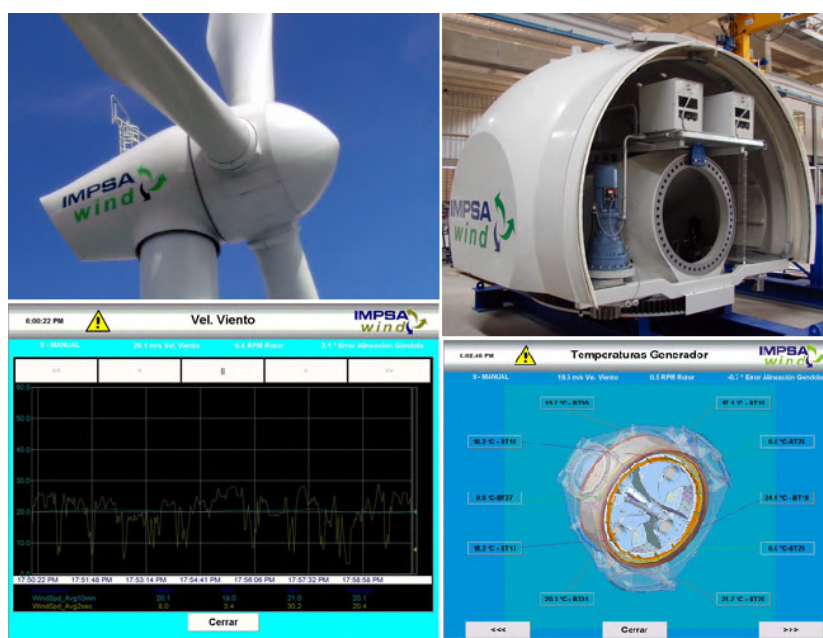


Figura 6.13: El sistema direct-drive requiere de un control de temperatura de los componentes electrónicos.

Más ejemplos en catálogos que se descargan de:

- (1.5; 2.5; 3 MW) <http://www.goldwindamericas.com/>
- (60; 100 KW) <http://www.northernpower.com>
- (4.3 MW) <https://www.siemens.com/global/en/home/markets/wind/turbines-and-services.html>
- (1.5; 1.8; 2.1; 2 MW) <http://www.impsa.com/es/productos/impsawind/>
- <http://www.impsa.com/es/descargas/WIND/UNIPOWER.pdf>
- <http://www.impsa.com/es/descargas/WIND/VENSYS.pdf>

Movimiento de un Sistema de Partículas

Fuerzas externas, internas y efectivas
Centro de masa
Momentum lineal y angular de un sistema de partículas

Ley de impulso y cantidad de movimiento lineal para un sistema

Conservación de la cantidad de movimiento lineal en un sistema

Ley de impulso y cantidad de movimiento angular para un sistema

Conservación de la cantidad de movimiento angular en un sistema

Ley de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

Conservación de la energía mecánica para un sistema de partículas

7. Sistemas de partículas

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas consideradas juntas, parte de ellas son totalmente libres y algunas de ellas pueden estar vinculadas entre sí o a un medio fijo [BJC10, Cap. 14].

En este capítulo se describen las ecuaciones que gobiernan el *movimiento de un sistema de partículas* sin vínculos entre ellas y sometidas a fuerzas de interacción a distancia. Estudiaremos cuál es la implicancia en la segunda ley de Newton al considerar que sobre las partículas actúan fuerzas de interacción mutua que satisfacen la tercera ley de Newton. Otra consideración sobre el sistema es que no pierde partículas.

Los conceptos se vincularán con el choque entre partículas y con las ecuaciones del movimiento para cuerpos rígidos que veremos en los capítulos posteriores.

7.1 Movimiento de un Sistema de Partículas

En un sistema de partícula, veremos las relaciones que se cumplen entre las fuerzas externas al sistema, las fuerzas internas de interacción mutua entre partículas y las consiguientes aceleraciones adquiridas en según la segunda y tercera ley de Newton.

7.1.1 Fuerzas externas, internas y efectivas

Sobre una partícula P_i de masa m_i , con vector posición es $\vec{r}_i$ con respecto a un marco inercial $O - x - y - z$, se ejerce una resultante de *fuerzas externas* al sistema $\vec{F}_i$ y posee *fuerzas internas* de interacción con otras partículas del sistema. Consideremos que las fuerzas de interacción entre dos partículas actúan a distancia y que por la tercera Ley de Newton, son iguales, opuestas y tienen la mismas línea de acción. Por ejemplo, $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza ejercida sobre P_i por la partícula P_j y $\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}$ son todas las fuerzas internas ejercidas sobre P_i por las otras partículas. No se escribirá, por claridad de las ecuaciones, pero vale aclarar que la partícula no interactúa consigo misma, es decir, no existe $\vec{F}_{ii}$ por lo que en las sumatorias deberíamos considerar que $j \neq i$.

Luego, la segunda Ley de Newton para la partícula P_i se enuncia como

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i \quad (7.1)$$

donde $m_i \vec{a}_i$ es la fuerza efectiva de la partícula i ; ver esquema en la Figura 7.1.

Las fuerzas que actúan sobre las partículas, en general, no son concurrentes y por ello se debe considerar una ecuación vectorial de momentos con respecto a un centro arbitrario O , origen de la coordenada vectorial de cada vector posición $\vec{r}$.

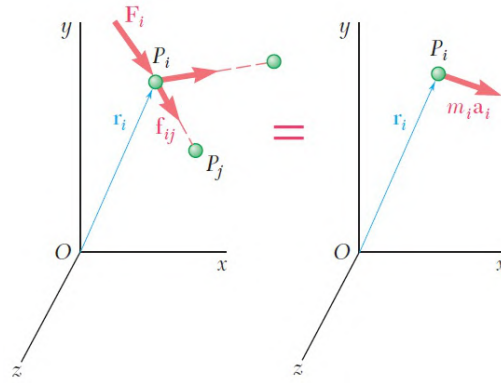


Figura 7.1: Dos sistemas de fuerzas son *equipolentes* cuando tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Dos sistemas de fuerzas son *equivalentes* cuando son equipolentes y actuando por separado, producen el mismo efecto. El sistema que forman las fuerzas externas e internas es equivalente al sistema que forman las fuerzas efectivas.

Tomando momentos de cada término de (7.1) con respecto al origen O

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

se forma el sistema de 2 ecuaciones vectoriales para la partícula P_i

$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} &= m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) &= \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases} \quad (7.2)$$

La ecuación para el sistema de partículas se obtiene sumando las ecuaciones del movimiento de las n partículas

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \\ \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases} \quad (7.3)$$

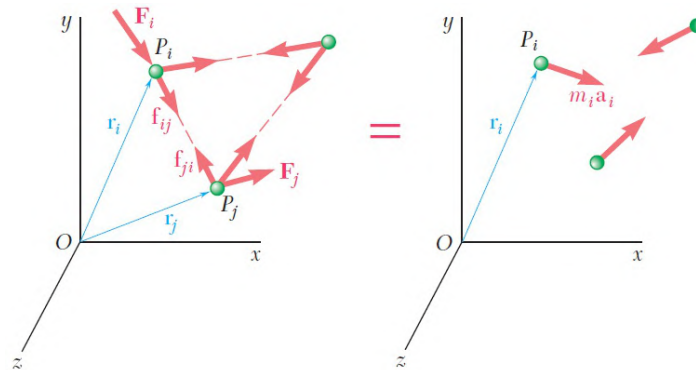


Figura 7.2: Sistema de 3 partículas interactuando cuyo movimiento depende de las fuerzas externas aplicadas e internas generadas sobre las partículas.

Las fuerzas internas entre pares de partículas son iguales y opuestas por lo tanto tienen resultante nula. Para cada fuerza $\vec{F}_{ij}$ existe su opuesta $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ sobre la misma recta de acción, entonces la

suma se anula $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$. A su vez, dicho par de fuerzas no producen momento porque la suma de los momentos

$$\begin{aligned}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) \\ &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \\ &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \\ &= \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}\end{aligned}\quad (7.4)$$

es igual al vector nulo; el vector de posición relativa $\vec{r}_{ij}$ es colineal con $\vec{F}_{ij}$.

Entonces para el sistema completo dado por las ecuaciones (7.3) se cumple que se anulan las interacciones entre las fuerzas internas y sus momentos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) = 0$$

y la ecuación vectorial del movimiento (2^{da} Ley de Newton) para el sistema de n partículas es

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \\ \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \end{cases} \quad (7.5)$$

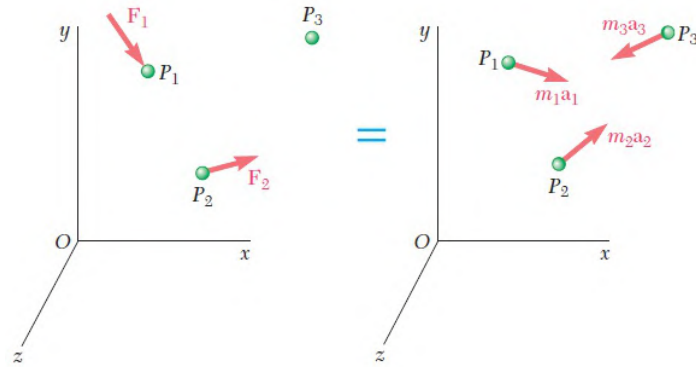


Figura 7.3: El sistema de fuerzas externas y las fuerzas efectivas tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, son sistemas equipolentes. Nótese que no producen el mismo efecto, ya que en el sistema de la izquierda no habría movimiento de la partícula P_3 ; un sistema no puede ser reemplazado por el otro para producir el mismo efecto.

Si las fuerzas internas obedecen a la tercera Ley de Newton, el sistema de fuerzas externas $\vec{F}_i$ y las fuerzas efectivas $m_i \vec{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante alrededor de cualquier punto dado, por lo tanto, son sistemas equipolentes. Los sistemas no son equivalentes cuando el movimiento depende de las fuerzas interiores. El sistema de fuerzas internas es equipolente al vector nulo, sin embargo, ello no implica que no tengan influencia en el movimiento de las partículas consideradas en el sistema. Por ejemplo, el sistema solar no está sometido a fuerzas externas y el movimiento de los planetas alrededor del sol se debe únicamente a la existencia de fuerzas internas.

7.1.2 Centro de masa

Veremos como simplificar el lado derecho de la expresión (7.5). El centro de masa de un sistema de partículas es el punto C definido por el vector posición $\vec{r}$, que satisface la relación

$$m\vec{r} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (7.6)$$

donde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ representa la masa total del sistema de partículas. Es decir, la posición del centro de masa es el promedio de las posiciones de las masas ponderado por sus respectivas masas,

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{m}$$

y puede no corresponder a la posición física de una partícula.

Derivando (7.6) con respecto al tiempo obtenemos

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i \quad \bar{\mathbf{p}} = m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad (7.7)$$

y derivando nuevamente obtenemos la aceleración

$$m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_i \quad \dot{\bar{\mathbf{p}}} = m\bar{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{a}}_i \quad (7.8)$$

Reemplazamos en las ecuaciones del movimiento (7.3) y obtenemos (sumatorias sobre las n partículas)

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_i &= \sum m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum (m \vec{\mathbf{a}})_i = m\bar{\mathbf{a}} \\ \sum (\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i) &= \sum (\vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{a}}_i) = \sum (\vec{\mathbf{r}}_i \times m \vec{\mathbf{a}})_i = \sum \vec{\mathbf{M}}_{O_i} \end{cases} \quad (7.9)$$

- La primer ecuación vectorial expresa que: “El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto”.
- En general, la resultante de las fuerzas efectivas no pasa por el centro de masa, $\sum \vec{\mathbf{M}}_{O_i} \neq \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{a}}$. Las ecuaciones escalares de (7.9) en coordenadas cartesianas rectangulares resultan

$$\begin{cases} \sum (F_x)_i &= \sum (ma_x)_i = ma_{Cx} \\ \sum (F_y)_i &= \sum (ma_y)_i = ma_{Cy} \\ \sum (F_z)_i &= \sum (ma_z)_i = ma_{Cz} \\ \sum (M_{Ox})_i = \sum (yF_z - zF_y)_i &= \sum [m(ya_z - za_y)]_i \\ \sum (M_{Oy})_i = \sum (zF_x - xF_z)_i &= \sum [m(za_x - xa_z)]_i \\ \sum (M_{Oz})_i = \sum (xF_y - yF_x)_i &= \sum [m(xa_y - ya_x)]_i \end{cases} \quad (7.10)$$

7.1.3 Momentum lineal y angular de un sistema de partículas

Las ecuaciones vectoriales (7.3) se pueden expresar como tasas de cambio de los momentos lineal y angular

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{p}} = \sum m_i \vec{\mathbf{v}}_i & \therefore \dot{\vec{\mathbf{p}}} = \sum m_i \dot{\vec{\mathbf{v}}}_i = \sum m_i \vec{\mathbf{a}}_i \\ \vec{\mathbf{H}}_O = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i & \therefore \dot{\vec{\mathbf{H}}}_O = \sum (\underbrace{\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\vec{\mathbf{v}}}_i}_{\substack{\text{colineales} \\ \vec{\mathbf{v}}_i}}) = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{a}}_i \end{cases}$$

Entonces la segunda ley de Newton para toma la forma

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_i &= \dot{\vec{\mathbf{p}}} \\ \sum \vec{\mathbf{M}}_{O_i} &= \dot{\vec{\mathbf{H}}}_O \end{cases} \quad (7.11)$$

“La resultante y el momento resultante con respecto a un punto O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a la tasa de cambio del momentum lineal y angular del sistema de partículas con respecto a O .”

7.2 Ley de impulso y cantidad de movimiento lineal para un sistema

Para una partícula P_i en un sistema de n partículas, las fuerzas exteriores e interiores producen un impulso diferencial que es igual al cambio diferencial de *momentum lineal*

$$\vec{F}_i dt + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} dt = d(m_i \vec{v}_i)$$

que integrada del instante t_1 al t_2 resulta en

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_i dt}_{\text{Imp.F.externa}} + \underbrace{\int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} dt}_{\text{Imp.F.interna}} = \int_1^2 d \underbrace{(m_i \vec{v}_i)}_{\text{Cant.mov.}P_i}$$

Para el sistema de n partículas, se tienen n ecuaciones vectoriales. Sumando miembro a miembro dichas ecuaciones se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i dt + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} dt = \sum_{i=1}^n \int_1^2 d(m_i \vec{v}_i)$$

donde los impulsos de pares de fuerzas internas

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} dt + \vec{F}_{ji} dt &= \vec{F}_{ij} dt + (-\vec{F}_{ij}) dt \\ &= (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) dt \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

se cancelan entre sí de a pares eliminando al segundo término del lado izquierdo. Luego, las ecuaciones se reducen a

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^n \int_1^2 d(m_i \vec{v}_i)$$

e intercambiando sumatoria con la integral en el lado derecho

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i dt = \int_1^2 d \left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \right]$$

e integrándolo se obtiene

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i dt}_{\vec{J}_{12}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \Big|_2}_{\vec{L}_2} - \underbrace{\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \Big|_1}_{\vec{L}_1}$$

El impulso lineal de todas las fuerzas exteriores sobre un sistema de partículas es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema.

$$\boxed{\vec{J}_{12} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta \vec{L}} \quad (7.12)$$

Las ecuaciones escalares son

$$\begin{cases} \int_1^2 (F_x)_i dt = \sum (mv_x)_i \Big|_2 - \sum (mv_x)_i \Big|_1 \\ \int_1^2 (F_y)_i dt = \sum (mv_y)_i \Big|_2 - \sum (mv_y)_i \Big|_1 \\ \int_1^2 (F_z)_i dt = \sum (mv_z)_i \Big|_2 - \sum (mv_z)_i \Big|_1 \end{cases} \quad (7.13)$$

7.2.1 Conservación de la cantidad de movimiento lineal en un sistema

Si el impulso lineal sobre todo el sistema $\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i dt$ se mantiene nulo durante el lapso de tiempo de t_1 a t_2 , entonces $\vec{J}_{12} = \vec{0}$ y se obtiene

$$\left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \right]_1 = \left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \right]_2$$

Luego, $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ es la ecuación vectorial de conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema.

7.3 Ley de impulso y cantidad de movimiento angular para un sistema

Para una partícula i en un sistema de n partículas, calculamos el momento de las fuerzas exteriores e interiores que producen un impulso angular diferencial y un cambio diferencial del *momentum angular*

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i dt + \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) dt = \vec{r}_i \times d(m_i \vec{v}_i)$$

utilizando la notación de índices $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r} \times \vec{F})_i$ y $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = (\vec{r} \times m \vec{v})_i$, e integrando del instante t_1 al t_2 resulta

$$\underbrace{\int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})_i dt}_{\text{Imp.Ang.F.externa}} + \underbrace{\int_1^2 \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) dt}_{\text{Imp.Ang.F.interna}} = \int_1^2 d \underbrace{(\vec{r} \times m \vec{v})_i}_{\text{Cant.mov.Ang.P}_i}$$

Para el sistema de n partículas,

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})_i dt + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) dt}_{=\vec{0}} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 d(\vec{r} \times m \vec{v})_i$$

los impulsos de los momentos de las fuerzas internas se cancelan entre sí (se puede demostrar que $(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) dt + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) dt = (\vec{0}) dt$, factorizando dt y procediendo como en (7.4)), la ecuación se reduce a

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})_i dt = \sum_{i=1}^n \int_1^2 d(\vec{r} \times m \vec{v})_i$$

en el lado derecho podemos intercambiar sumatoria e integral

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})_i dt = \int_1^2 d \left(\sum_{i=1}^n (\vec{r} \times m \vec{v})_i \right)$$

e integrando el lado derecho

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})_i dt}_{\Sigma \int \vec{M}_{O_i} dt = \vec{Y}_{12}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r} \times m \vec{v})_i}_{\vec{H}_{O2}} \bigg|_2 - \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r} \times m \vec{v})_i}_{\vec{H}_{O1}} \bigg|_1$$

El impulso angular de todas las fuerzas exteriores sobre un sistema de partículas es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema.

$$\vec{Y}_{12} = \vec{H}_{O2} - \vec{H}_{O1} = \Delta \vec{H}_O$$

Las ecuaciones escalares son

$$\begin{cases} \sum \int_1^2 (y F_z - z F_y)_i dt &= \sum [m(y v_z - z v_y)]_i \Big|_2 - \sum [m(y v_z - z v_y)]_i \Big|_1 \\ \sum \int_1^2 (z F_x - x F_z)_i dt &= \sum [m(z v_x - x v_z)]_i \Big|_2 - \sum [m(z v_x - x v_z)]_i \Big|_1 \\ \sum \int_1^2 (x F_y - y F_x)_i dt &= \sum [m(x v_y - y v_x)]_i \Big|_2 - \sum [m(x v_y - y v_x)]_i \Big|_1 \end{cases} \quad (7.14)$$

7.3.1 Conservación de la cantidad de movimiento angular en un sistema

Si el impulso angular sobre todo el sistema $\vec{Y}_{12} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{M}_{O_i} dt$ se mantiene nulo durante el lapso de tiempo de t_1 a t_2 , $\vec{Y}_{12} = \vec{0}$, resulta

$$\left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \right]_1 = \left[\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) \right]_2$$

Entonces, $\vec{H}_{O_1} = \vec{H}_{O_2}$ es la ecuación vectorial de conservación de la cantidad de movimiento angular de un sistema.

7.4 Ley de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

El trabajo elemental $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}$ que produce la resultante de las fuerzas externas sobre una partícula aislada P_i al desplazarse infinitesimalmente $d\vec{r}$, es igual al cambio diferencial en la energía cinética

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

Para una partícula i en un sistema de n partículas, las fuerzas exteriores e interiores producen un *trabajo de traslación* y un cambio diferencial en la *energía cinética*. Luego, del instante t_1 al t_2 resulta

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}_{\text{Trab.F. externa}} + \underbrace{\int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{Trab.F. interna}} = \underbrace{\int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)}_{\text{Energ.Cin.Tras. } P_i}$$

Para el sistema de n partículas,

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{En.gral,no.nulas}} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \quad (7.15)$$

Como se muestra en la Figura 7.4 el trabajo de fuerzas internas entre dos partículas i y j en general no es nulo, es decir, $\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \neq \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j$. En la suma de trabajos de fuerzas internas iguales y opuestas, se puede reemplazar la fuerza $\vec{F}_{ji}$ por $-\vec{F}_{ij}$ y así obtener

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j &= \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j \\ &= \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\ &= \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}. \end{aligned}$$

Entonces, existe un trabajo de las fuerzas internas de un par de partículas cuando existe un desplazamiento relativo $d\vec{r}_{ij}$ entre ellas.

Partiendo de (7.15), simplificando índices, intercambiando la integral con la sumatoria a la derecha, e integrando el lado derecho

$$\begin{aligned} U_{12} &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r})_i}_{\text{Trab.fzas.ext.acti.y.react.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{Trab.fzas.internas}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m v^2\right)_i \Big|_2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m v^2\right)_i \Big|_1 \\ &= T_2 - T_1 = \Delta T \end{aligned}$$

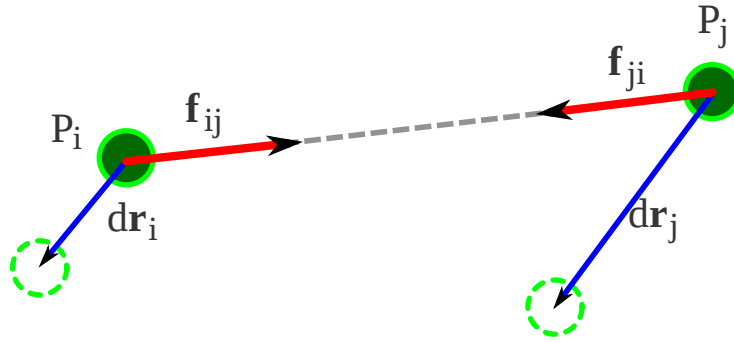


Figura 7.4: Ejemplo de fuerzas internas realizando un trabajo no nulo.

El trabajo de todas las fuerzas exteriores e interiores, conservativas y no conservativas, sobre un sistema de partículas es igual a la variación de la energía cinética del sistema.

$$U_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

7.4.1 Conservación de la energía mecánica para un sistema de partículas

Consideremos algunas formas de energía potencial que generan fuerzas conservativas sobre una partícula. La energía potencial gravitatoria debida al peso es $V_g = W y = mgy$. La energía potencial elástica en el caso de existir vínculos sin masa del tipo lineal elástico es $V_e = \frac{1}{2}k\delta^2$. Luego, la energía potencial total en la partícula P_i es $V_i = V_g + V_e$.

Consideremos algunas formas de energía potencial que posee un sistema de n partículas:

- **Energía potencial gravitatoria:** Con un sistema de eje Oy vertical positivo hacia arriba, la energía potencial gravitatoria para el sistema de n partículas es

$$V_g = \sum_{i=1}^n W_i y_i = g \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

y utilizando el centro de masas del sistema

$$V_g = W y_C = mgy_C, \quad \text{con} \quad W = \sum_{i=1}^n W_i; \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

- **Energía potencial elástica:** Se extiende a la suma de todos los e vínculos elásticos, externos e internos $V_e = \sum_{j=1}^e \frac{1}{2} k_j \delta_j^2$.

La energía potencial total del sistema es $V = V_g + V_e$. Ante fuerzas exclusivamente conservativas, el trabajo se puede escribir como

$$U_{12} = -(V_2 - V_1) = -\Delta V$$

Vimos que

$$U_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Igualando los trabajos, se tiene

$$\Delta T = -\Delta V$$

ó

$$T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1)$$

que se expresa en cada instante como

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{cte}$$

Ante fuerzas conservativas, la energía mecánica total $T + V$, se conserva para cualquier configuración del sistema.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{cte}$$

En un sistema de partículas sobre las cuales sólo actúan fuerzas exteriores e interiores conservativas, la energía mecánica total asociada al sistema se conserva.



8. Fenómenos Percusivos

La percusión es un encuentro entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy corto de tiempo y durante el cual se ejercen entre sí fuerzas relativamente grandes (los cambios en las velocidades y aceleraciones de los cuerpos son notables). Estas fuerzas superan al peso y otras fuerzas de fricción, que se ignorarán en el fenómeno. Dependiendo de los materiales de los cuerpos, se producen deformaciones elásticas o permanentes (plásticas).

En la percusión es difícil establecer la dependencia entre fuerza y tiempo para determinar el impulso. Mediante instrumentos ópticos y electrónicos se pueden aproximar las fuerzas, midiendo las velocidades, en lapsos de milésimas de segundo.

En la figura que encabeza este capítulo se muestra la determinación experimental del choque de un vehículo real con un obstáculo fijo con determinada capacidad de absorción de energía de deformación, en donde el objetivo principal es la seguridad e integridad de los ocupantes.

Las ecuaciones que se verán en este capítulo nos permitirán conocer las ecuaciones básicas del fenómeno de choque central directo. Para ello haremos uso del principio de impulso y cantidad de movimiento de un sistema formado por dos partículas, de la conservación del impulso antes del choque y de un nuevo concepto denominado *coeficiente de restitución* que caracterizará al choque unidimensional y encapsula la relación entre el impulso de deformación y restitución.

8.1 Clasificación de los fenómenos percusivos

Un choque es un fenómeno percusivo entre dos cuerpos que entran en contacto debido a que sus trayectorias coinciden en espacio y tiempo. Para simplificar el estudio, asumimos que los cuerpos que chocan son sólidos deformables. Mencionemos algunos ejemplos: En los deportes, el humano domina intuitivamente y por experimentación repetida al fenómeno de choque (pelota de tenis/raqueta/piso). En aplicaciones bélicas hay infinidad de ejemplos (misiles, misiles antiaéreos, etc.). En vehículos de pasajeros, se agregan elementos de seguridad para minimizar los efectos de un choque (cinturones de seguridad, airbags, barras laterales, estructura monocasco flexible, etc); ver Figura 8.1.

En el choque las fuerzas que se ejercen mutuamente ambos cuerpos son fuerzas de acción y reacción, cumpliendo la 3ra Ley de Newton, es decir, son de igual magnitud, opuestas y colineales. Geométricamente, un choque comienza con un *punto inicial de contacto* entre las superficies de los cuerpos; luego deriva en una curva y posteriormente en una superficie de contacto. Existe un plano tangente a ambas superficies de contacto, la normal a este plano define la dirección de la *línea de choque*. Durante el choque, la superficie de contacto común a ambos cuerpos crece con el tiempo en el período de deformación hasta un máximo y luego decrece en el período de restitución.

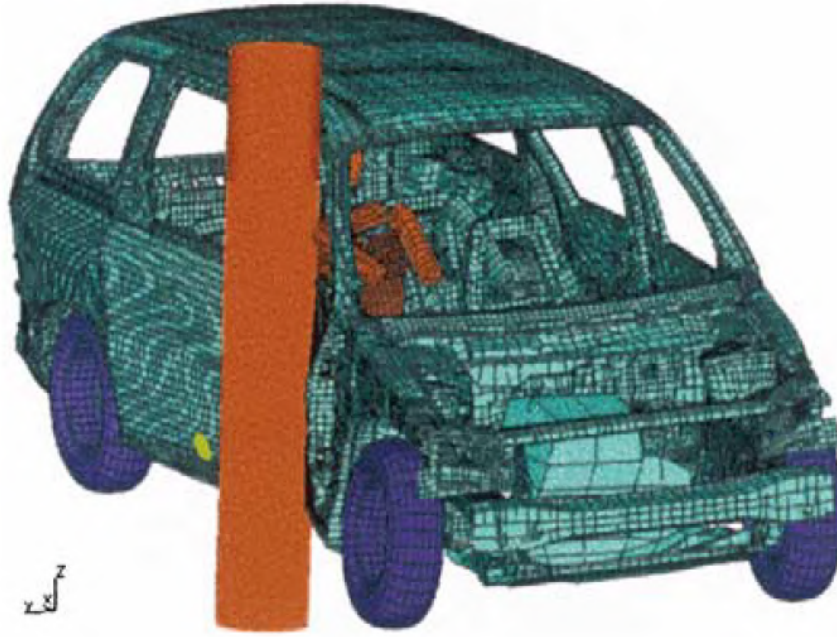


Figura 8.1: Choque de prueba (*crash test*) realizado a un vehículo virtual por simulación computacional. La simulación permite hacer ajustes y analizar contingencias antes de los costosos ensayos reales.

8.2 Choque entre dos partículas

Las configuraciones del choque entre dos partículas pueden ser muy variadas, las posiciones de los centros de masa de los cuerpos y de los vectores velocidad con respecto a la línea de choque nos da una clasificación básica:

- Choque central: Los centros de masa están sobre la línea de choque.
- Choque excéntrico: Los centros de masa no están sobre la línea de choque.
- Choque directo: Los vectores velocidad son paralelos a la línea de choque.
- Choque oblicuo: Los vectores velocidad no son paralelos a la línea de choque.

8.3 Coeficiente de restitución

Consideremos un choque central directo de dos partículas A y B de masas m_A y m_B que se mueven hacia la derecha con velocidades v_A y v_B como se muestra en la Figura 8.2.

Inicialmente, no hay fuerza impulsiva externa pero actúan fuerzas internas que pueden modificar al sentido (y dirección en otros casos) de las velocidades. El momentum lineal del sistema de dos partículas a un tiempo t (antes del choque) y a un tiempo t' (después del choque), ambas mostradas en las Figuras 8.2 (a) y (e), se debe conservar

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (8.1)$$

En un fenómeno en una misma dirección prescindiremos de las ecuaciones vectoriales y utilizaremos ecuaciones escalares reemplazando a los vectores velocidad por sus magnitudes con signo según una convención adoptada convenientemente. La conservación del momentum lineal (8.1) queda entonces expresada por

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (8.2)$$

Asumiendo que las masas son conocidas, tenemos cuatro magnitudes de velocidad como incógnitas. Para obtener $\{v_A, v_B, v'_A, v'_B\}$ necesitamos otra ecuación.

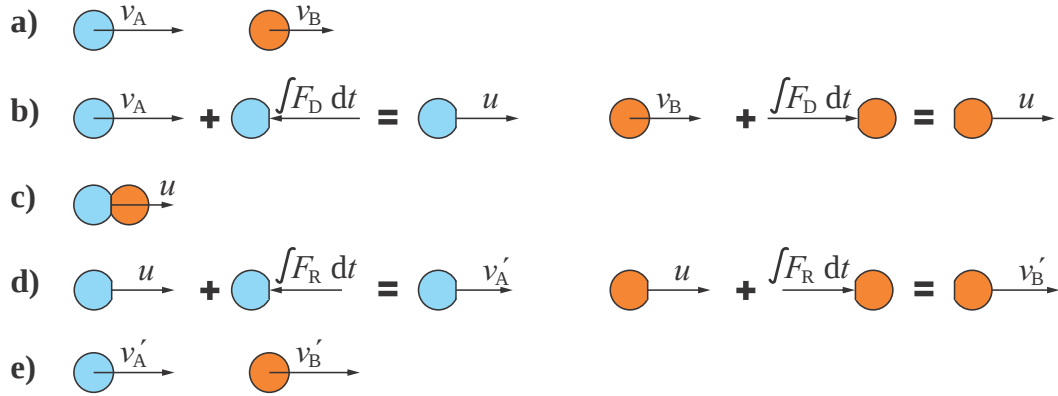


Figura 8.2: Choque entre dos partículas: (a) aproximación con $V_{B/A} < 0$; (b) impulso de deformación sobre los cuerpos A y B; (c) instante de impulso máximo en que los cuerpos tienen la misma velocidad u ; (d) impulso de restitución sobre los cuerpos; (e) alejamiento con $V_{B/A} > 0$

En el período de deformación de la partícula A (mostrada a la izquierda de la Figura 8.2 (b)) aplicamos el principio del impulso y momentum, en cuyo lapso de tiempo de deformación, la única fuerza impulsiva es la F_D ejercida por el cuerpo B en dirección opuesta a su movimiento

$$m_A v_A - \int F_D dt = m_A u \Rightarrow \int F_D dt = m_A v_A - m_A u \quad (8.3)$$

El período de deformación termina cuando ambas partículas adquieren una velocidad en común u ; ver Figura 8.2 (c).

En el período de restitución (izq. de Figura 8.2 (b)), la partícula B realiza un impulso, que, en los sistemas reales (no ideales), es menor que en la deformación

$$m_A u - \int F_R dt = m_A v'_A \Rightarrow \int F_R dt = m_A u - m_A v'_A \quad (8.4)$$

La relación entre las magnitudes de los impulsos, se llama coeficiente de restitución e , y se define como

$$e = \frac{\int F_R dt}{\int F_D dt} \quad 0 \leq e \leq 1 \quad (8.5)$$

en donde e depende de la forma, tamaño y materiales de los cuerpos y de las velocidades de los mismos mediante el siguiente razonamiento. Poniendo a e en función de las velocidades del cuerpo A aplicando la definición (8.5) mediante la división m.a.m. de (8.4) por (8.3), se obtiene

$$e = \frac{m_A(u - v'_A)}{m_A(v_A - u)} = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \quad (8.6)$$

Realizando un análisis similar para B, con las Figuras 8.2 de la derecha, en donde los impulsos son opuestos a los del cuerpo A se obtiene

$$e = \frac{m_B(v'_B - u)}{m_B(u - v_B)} = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \quad (8.7)$$

Las razones (8.6) y (8.7) ambas iguales a e se pueden sumar numerador a numerador y denominador a denominador, manteniéndose la razón e y se obtiene

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \quad (8.8)$$

que se puede expresar como

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad \therefore \quad v'_{B/A} = -e v_{B/A} \quad (8.9)$$

La velocidad relativa de las dos partículas después del choque puede obtenerse multiplicando su velocidad relativa antes del choque (con signo contrario) por el coeficiente de restitución.

Las dos ecuaciones (8.2) y (8.9) forman el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \\ v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \\ 0 \leq e \leq 1 \end{cases} \quad (8.10)$$

y podemos resolver problemas con dos incógnitas de los 5 valores $\{v_A, v_B, v'_A, v'_B, e\}$, por lo que 3 deben ser dato.

La expresión (8.9) aislada es muy importante porque permite obtener el coeficiente en forma experimental. Para velocidades iniciales v_A y v_B conocidas, se pueden medir y determinar v'_A y v'_B y luego calcular e .

En los casos reales, con $0 < e < 1$, se pierde energía en forma de calor y en la generación de ondas elásticas dentro de los cuerpos que chocan. Dos casos particulares e ideales aparecen para los valores límites de e :

$e = 0$ **Choque perfectamente inelástico (o plástico):** De (8.9) se obtiene $v'_B = v'_A$ indicando que ambas partículas permanecen juntas a una única velocidad v' . Reemplazando esto en (8.2) se obtiene

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v' \quad (8.11)$$

de donde se puede despejar v' si las masas y velocidades iniciales son conocidas.

$e = 1$ **Choque perfectamente elástico:** La ecuación (8.9) se reduce a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B = -(v_B - v_A) \quad (8.12)$$

lo que indica que las velocidades relativas antes y después del choque son iguales en magnitud, al igual que los impulsos de deformación y restitución. Después del choque las partículas se alejan con la misma velocidad con la que se acercaron, es decir que el momentum y la energía cinética total de las partículas se conserva (recordemos que es un caso ideal). De (8.2) se obtiene que el cambio de momentum en A es igual al de B

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \quad (8.13)$$

y de (8.9) con $e = 1$ se obtiene $v'_B - v'_A = v_A - v_B$ y luego

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \quad (8.14)$$

Multiplicando miembro a miembro (8.13) y (8.14) se obtienen diferencias de cuadrados y posteriormente multiplicando por 1/2 y reordenando lo que ocurre a igual tiempo en el mismo miembro se obtiene

$$\begin{aligned} m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) &= m_B(v'_B - v_B)(v_B + v'_B) \\ m_A v_A^2 - m_A v'^2_A &= m_B v'^2_B - m_B v_B^2 \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 &= \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \\ T_A + T_B &= T'_A + T'_B \end{aligned} \quad (8.15)$$

es decir, que la energía cinética total del sistema se conserva.

Nótese que en los casos reales en que $0 < e < 1$, existe energía de deformación elástica almacenada en los cuerpos durante la deformación que es devuelta sólo en parte en la restitución ya que una porción de la energía se transforma en calor y en ondas. En la transformación y transferencia de energía mecánica hay siempre una eficiencia menor que uno.

8.4 Choque oblicuo

En un choque oblicuo, las velocidades de las partículas no tienen la dirección de la línea de choque y se desconocen las velocidades v'_A y v'_B después del choque (4 incógnitas). Si establecemos que el eje y representa al plano de contacto o tangente común a ambas superficies en contacto y que el x es la línea de choque. Considerando superficies lisas libres de rozamiento, las fuerzas impulsivas de deformación y restitución actuarán sólo en la dirección x .

Se conserva la componente x del momentum total de las partículas

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A v'_{Ax} + m_B v'_{Bx} \quad (8.16)$$

El coeficiente de restitución

$$e = \frac{v'_{Bx} - v'_{Ax}}{v_{Ax} - v_{Bx}} \quad (8.17)$$

relaciona las componentes x de las velocidades relativas a lo largo de línea de choque. Con (8.16) y (8.17) se pueden determinar v'_{Ax} y v'_{Bx} .

Luego, a lo largo del eje y , el momentum de la partícula A se conserva

$$m_A v_{Ay} = m_A v'_{Ay} \rightarrow v_{Ay} = v'_{Ay} \quad (8.18)$$

y también el de la partícula B

$$v_{By} = v'_{By}. \quad (8.19)$$

8.5 Lecturas sugeridas

Existen otros tipos de choque, que requieren un mayor número de ecuaciones debiéndose tener cuidado con la cantidad que se conserva. Por ejemplo, en un juego de pool, se suceden choques planos y oblicuos, en donde las bolas pueden considerarse como partículas y se puede aplicar la teoría vista [MK96, p. 217, Cap. 3, Sec. D]. Aunque en realidad, el efecto de rotación de las bolas sobre sí mismas es lo que más enriquece al juego por sus efectos especiales. Estos giros que se producen al impactar descentradamente en la bola, corresponden a complejos movimientos de cuerpo rígido en donde las traslaciones son planas y paralelas al plano del paño y los ejes de rotación adquieren diferentes orientaciones con respecto al plano de juego. Un impacto fuerte descentrado en un balón de fútbol, puede producir trayectorias curvas debidas a la interacción entre la superficie del balón y el aire fluido. Como curiosidad, vale la pena mencionar que goles de Roberto Carlos, Michael Ballack o David Beckham han sido motivo de recientes simulaciones computacionales [Gal96] que analizan el diseño de los balones (ver comparación de fuerzas aerodinámicas de arrastre y sustentación en los balones Jabulani y Brazuca por J. Case [Cas14]).

En cuanto a la aplicación en ingeniería eléctrica, el impacto tiene gran importancia en los contactores e interruptores dado que el contacto entre el segmento móvil y el fijo debe suceder con una velocidad de aproximación prescrita para evitar que se formen arcos eléctricos que fundan a los mismos (del mismo modo, el desenclavamiento automático ante una falla tiene una velocidad y fuerza prescrita para un intervalo muy corto de tiempo). Por la poca disponibilidad horaria, no vimos sistemas de partículas con cambio de masa y la aplicación a volúmenes de control en fluidos que se puede aplicar en el flujo de agua en palas de turbinas generadoras. Se sugiere su lectura en la bibliografía que se menciona a continuación.

En este capítulo se siguió el razonamiento propuesto por Beer, Johnston y Cornwell [BJC10, Cap. 13] y la extensión del Prof. Ramón Solowey [Sol14]. Ejemplos muy vistosos y clarificadores del problema de impacto pueden encontrarse en el libro de Meriam y Kraige [MK96, Cap. 3] y en el libro de Hibbeler [Hib96, Cap. 15].

Cinemática de la rotación con eje fijo

Posición, velocidad y aceleración angular

Similitud con el movimiento de traslación rectilíneo

Rotación uniforme y uniformemente acelerada

Rotación con eje fijo: Movimiento de un punto del cuerpo

Rotación de una placa

Conversión de componentes naturales a componentes cartesianas

9. Cinemática de cuerpos rígidos

Dentro de las incumbencias de los ingenieros eléctricos, la dinámica de máquinas rotantes y las aplicaciones a motores eléctricos, generadores, excitatrices, etapas de turbinas de vapor, de gas e hidráulicas, hacen que el enfoque principal de esta unidad se haga sobre la dinámica de la rotación con eje fijo.

Se analizarán las ecuaciones del movimiento de cuerpos rígidos rotantes, las propiedades inerciales, las reacciones estáticas y dinámicas, su balanceo, y los métodos que ya hemos visto para partículas, la ley del impulso y la cantidad de movimiento, la conservación de la cantidad de movimiento, el método del trabajo y la energía, la conservación de la energía mecánica. Finalmente, se estudiarán las formas de cuantificar la disipación de energía con frenos dinamométricos.

En este capítulo nos enfocaremos a la cinemática y postergaremos la dinámica para los capítulos siguientes.

9.1 Cinemática de la rotación con eje fijo

Hemos visto que un cuerpo puede poseer un movimiento de traslación pura, una rotación pura, o bien un movimiento general combinando traslación y rotación; esto es válido tanto para el movimiento plano como para el tridimensional.

La rotación se caracteriza por un ángulo de rotación alrededor de un único eje denominado *eje de Euler* y este eje se puede mover espacialmente conforme pasa el tiempo. Si este eje permanece fijo, todas las partículas del cuerpo rígido se mueven en trayectorias circulares alrededor del eje de rotación y todas las líneas del cuerpo que son perpendiculares al eje de rotación rotan el mismo ángulo en el mismo tiempo.

Para imponer físicamente que el eje de rotación del cuerpo esté fijo, se restringen 5 grados de libertad del cuerpo mediante apoyos adecuados para las reacciones que soportan, como ser, cojinetes o rodamientos. Para evitar 3 traslaciones y 2 rotaciones en ejes mutuamente ortogonales, se requieren 3 fuerzas y 2 momentos de reacción en permanente actuación.

Necesariamente, los cuerpos rígidos están en contacto con sus apoyos y el desgaste es inminente en alguna etapa de la vida útil para lo cual se debe proceder al mantenimiento mecánico. En la Figura 9.1 se pueden ver máquinas rotantes que deben rotar con eje fijo. En las turbinas de gas que tienen un número muy elevado de revoluciones por minuto, el balanceo es crucial para un correcto funcionamiento. En aerogeneradores, la concepción de la transmisión mecánica intermedia entre el rotor y el generador eléctrico está siendo reemplazada por los generadores sincrónicos de imanes permanentes montados sobre el rotor, reduciendo la complejidad mecánica de la máquina y el mantenimiento. En todos los casos se desea obtener rotaciones puras alrededor de ejes fijos y sin perturbaciones.



Figura 9.1: Ejemplos de cuerpos rígidos en rotación con eje fijo: turbina de vapor (izquierda); aerogenerador de imanes permanentes que eliminan la necesidad de cajas de engranajes (derecha arriba); parque eólico en las costas de Noruega (derecha abajo).

9.1.1 Posición, velocidad y aceleración angular

Sea un cuerpo rotando alrededor del eje fijo AA' como el mostrado en la Figura 9.2, en donde Π es un semiplano fijo (en el espacio) que contiene al eje de rotación y π es un semiplano móvil (fijo al cuerpo) que también contiene al eje de rotación.

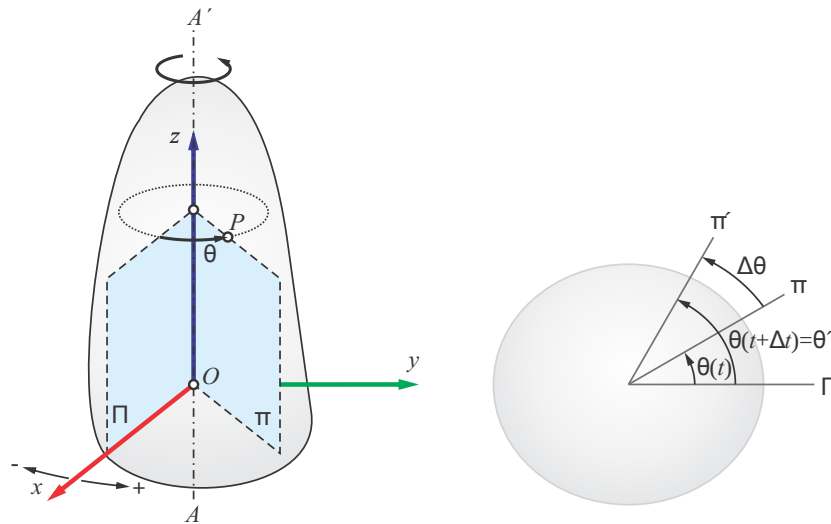


Figura 9.2: Movimiento global del cuerpo en rotación con eje fijo

La *posición angular* del cuerpo es la magnitud $\theta(t)$ de la distancia angular medida desde el plano fijo Π al plano móvil π y se representa por el arco dirigido en el sentido positivo adoptado. El ángulo θ es la *coordenada angular* del cuerpo y es positiva cuando gira en sentido contrario a las agujas del reloj observada desde A' , o bien, cuando corresponde al giro de un tornillo que avanza en sentido positivo del eje de rotación. La unidad en el S.I. es el *radián* y sus equivalencias son

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev} \quad (9.1)$$

Si el semiplano móvil π tiene una posición angular θ al tiempo t y una posición angular θ' al tiempo t' , se llama *desplazamiento angular* a la distancia angular entre dos posiciones angulares medida desde la posición final

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \quad (9.2)$$

Si este desplazamiento angular sucedió en un lapso de tiempo $\Delta t = t' - t$, se define a la *velocidad angular media* como

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (9.3)$$

el signo queda definido por el signo de $\Delta\theta$.

La velocidad angular instantánea, o simplemente, la *velocidad angular* se define como

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (9.4)$$

La unidad en el S.I. es el rad/s pero técnicamente es muy usada la velocidad angular en revoluciones por minuto

$$\text{r.p.m.} = \frac{1 \text{ rev}}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{min}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (9.5)$$

Con el mismo razonamiento, se define a la *aceleración angular media* como

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (9.6)$$

donde claramente, la unidad en el S.I. es el rad/s².

La *aceleración angular* es la rapidez con la cual cambia la velocidad angular a cada instante

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \quad (9.7)$$

9.1.2 Similitud con el movimiento de traslación rectilíneo

Las magnitudes cinemáticas de la rotación con eje fijo son análogas a las del movimiento de traslación rectilínea por estar gobernadas por ecuaciones diferenciales con idéntica estructura a diferencia que el desplazamiento lineal se cambia por el angular.

Movimiento \ Magnitud	Posición	Velocidad	Aceleración
Lineal: traslación rectilínea	s (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
Angular: rotación eje fijo	θ (rad)	ω (rad/s)	α (rad/s ²)

Los métodos de resolución directo e inverso y la resolución gráfica siguen un razonamiento idéntico.

Problemas directo e inverso

Al igual que con el movimiento de traslación rectilínea, cuando se debe hacer una derivación se tiene un problema directo y cuando se debe hacer una integración se tiene un problema inverso. Si recuadramos a la función dato, el procedimiento sería el siguiente

$$\begin{array}{llll} \boxed{\theta = \theta(t)} \rightarrow & \omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow & \alpha = \frac{d\omega}{dt} & \\ \theta = \int \omega dt \leftarrow & \boxed{\omega = \omega(t)} \rightarrow & \alpha = \frac{d\omega}{dt} & \\ \theta = \int \omega dt \leftarrow & \omega = \int \alpha dt \leftarrow & \boxed{\alpha = \alpha(t)} & \end{array} \quad (9.8)$$

9.1.3 Rotación uniforme y uniformemente acelerada

Los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = \text{cte}$ conducen a fórmulas cerradas sencillas, obtenidas de integrar la tercer línea de las ecuaciones (9.8).

La rotación uniforme (RU) se produce cuando la aceleración angular es nula y por lo tanto la velocidad angular es constante $\omega(t) = \omega_0$, luego

Dato : $\alpha = 0$ PI : $\omega = \omega_0$ PI : $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$
--

(9.9)

La rotación uniformemente acelerada (RUA) se produce cuando la aceleración angular es constante $\alpha(t) = \alpha_0$, entonces

Dato : $\alpha = \alpha_0$ PI : $\omega = \omega_0 + \alpha_0 t$ PI : $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$

(9.10)

También se puede utilizar la fórmula

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (9.11)$$

que igualada al dato de aceleración constante e integrándola resulta en

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\omega}{d\theta} &= \alpha_0 \\
\omega d\omega &= \alpha_0 d\theta \\
\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega &= \alpha_0 \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \\
\frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) &= \alpha_0 (\theta - \theta_0)
\end{aligned} \quad (9.12)$$

llegando a la fórmula cerrada

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_0(\theta - \theta_0)$
--

(9.13)

El empleo de las ecuaciones (9.10) ó (9.13) deben elegirse coherentemente según los datos de que se dispone.

9.2 Rotación con eje fijo: Movimiento de un punto del cuerpo

Un cuerpo rígido se puede concebir como un sistema de partículas o puntos de volúmenes infinitesimales, en donde la distancia entre dos puntos cualquiera permanece constante.

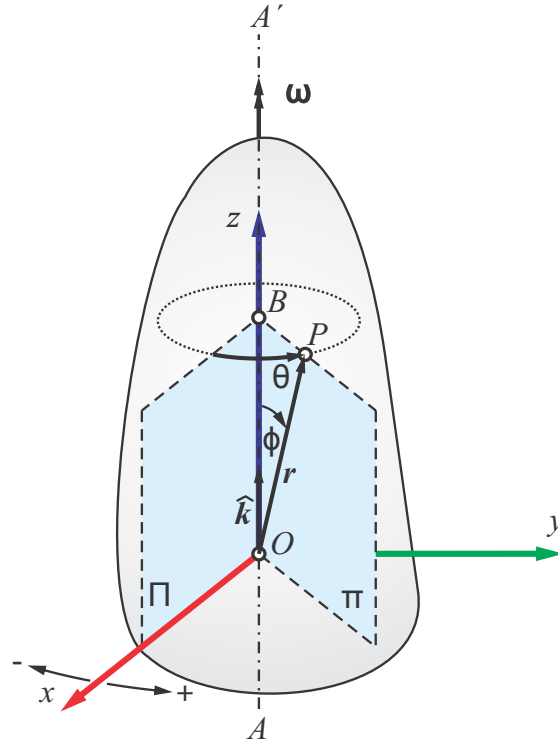


Figura 9.3: Movimiento de un punto del cuerpo en rotación con eje fijo

Determinaremos la cinemática de una partícula P arbitraria del cuerpo en rotación que efectúa una trayectoria circular con centro en el eje de rotación. Como se hizo anteriormente, se toma un semiplano fijo Π que contiene al eje de rotación y un semiplano móvil π que también contiene al eje de rotación y a la partícula P . Tomamos un origen O arbitrario sobre el eje de rotación AA' y colocamos una terna con el plano xz solidario con el plano Π para medir la posición $\mathbf{r}$ de la partícula P .

Sea B la proyección de P sobre el eje de rotación AA' por lo que P permanece a una distancia constante de B y describe una circunferencia de radio $r \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el eje AA' . La posición angular θ entre Π y π es el ángulo entre la línea $\overline{BP}$ y el plano de referencia xz o (Π).

La velocidad lineal de la partícula $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es un vector tangente a la trayectoria de P y de magnitud $v = \frac{ds}{dt}$.

El arco Δs descrito por P cuando el cuerpo rota un ángulo $\Delta \theta$ es

$$\begin{aligned} (\text{arco}) &= (\text{radio})(\text{ángulo}) \\ \Delta s &= \overline{BP} \Delta \theta = (r \sin \phi) \Delta \theta \end{aligned} \quad (9.14)$$

dividiendo por Δt y tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la rapidez es

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(r \sin \phi) \Delta \theta}{\Delta t} \\ &= (r \sin \phi) \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad (9.15)$$

donde θ depende de P pero $\dot{\theta}$ es independiente de la partícula elegida; a un instante dado, todas las partículas giran con la misma velocidad angular. Luego, $\mathbf{v}$ es perpendicular al plano π , que contiene a $\mathbf{r}$ y al eje AA' , y tiene magnitud $v = r \dot{\theta} \sin \phi$.

Utilizando un versor $\hat{k}$ alineado con el eje AA' , definimos al *vector velocidad angular* del cuerpo como

$$\omega = \dot{\theta} \hat{k} = \theta \dot{\hat{k}} \quad (9.16)$$

como $\hat{k}$ es constante, derivando esta expresión podemos obtener el *vector aceleración angular*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \hat{k} = \ddot{\theta} \hat{k} \quad (9.17)$$

luego, podemos expresar al *vector velocidad* de magnitud $v = \omega r \sin \phi$ como

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r} \quad (9.18)$$

La aceleración a de la partícula P se obtiene derivando a v

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times r) = \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \underbrace{\frac{dr}{dt}}_v \\ &= \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \underbrace{v}_{\omega \times r} \\ &= \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha} \times r + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned} \quad (9.19)$$

e incluyendo a la aceleración angular en el primer término queda

$$\boxed{a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_t} + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{a_n}} \quad (9.20)$$

que es la expresión de la aceleración del punto de coordenada r como función de la posición misma y del movimiento como un todo definido por ω y α .

El vector $\alpha \times r$ es tangente a la circunferencia descrita por P y es la componente tangencial de la aceleración.

En el triple producto $\omega \times (\omega \times r)$, el vector ω tiene la dirección del eje y el vector $v = \omega \times r$ tiene dirección tangente a la circunferencia en P , luego el vector resultante está dirigido hacia el centro B y es la componente normal de la aceleración.

9.2.1 Rotación de una placa

En cuerpos rotantes con simetría axial, es decir, con sección transversal al eje que se repite sistemáticamente, las expresiones de posición r , velocidad v y aceleración a se simplifican y son de uso intensivo en ingeniería.

Se realiza un corte en un plano representativo de referencia perpendicular al eje de rotación (plano xy) con versor normal saliente $\hat{k}$ en dirección del eje de rotación, y se elige arbitrariamente un punto P de posición r que ahora está sobre el plano ($\phi = \pi/2$).

La velocidad del punto es

$$\boxed{v = \omega \hat{k} \times r} \quad (9.21)$$

dado que $\hat{k} \perp r$, la rapidez es $v = r\omega$.

La aceleración se expresa como

$$a = \underbrace{\alpha \hat{k} \times r}_{a_t} + \underbrace{\omega \hat{k} \times (\omega \hat{k} \times r)}_{a_n} \quad (9.22)$$

y dado que $\hat{k} \times r = r'$ rota a r en 90° y $\hat{k} \times r'$ rota a r' en 90° adicionales, el vector r rota un total de 180° , apuntando en sentido opuesto al original, es decir, $\hat{k} \times (\hat{k} \times r) = -r$. Luego, la aceleración se simplifica a

$$\boxed{a = \alpha \hat{k} \times r - \omega^2 r} \quad (9.23)$$

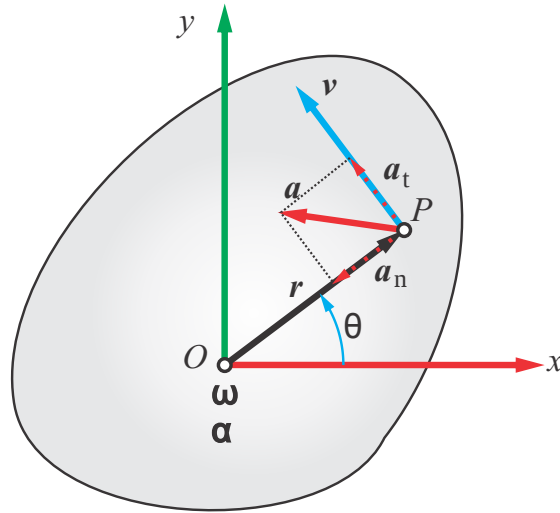


Figura 9.4: Rotación de una placa representativa del cuerpo

donde claramente, la aceleración tangencial apunta en el sentido de la velocidad si α es positivo, y el vector de aceleración normal siempre apunta hacia O .

9.2.2 Conversión de componentes naturales a componentes cartesianas

Para el análisis cinético del movimiento de rotación con eje fijo y la determinación de las reacciones de vínculo, es común necesitar contar con las expresiones cinemáticas de cualquier partícula en componentes cartesianas, como función del movimiento de rotación r , ω y α .

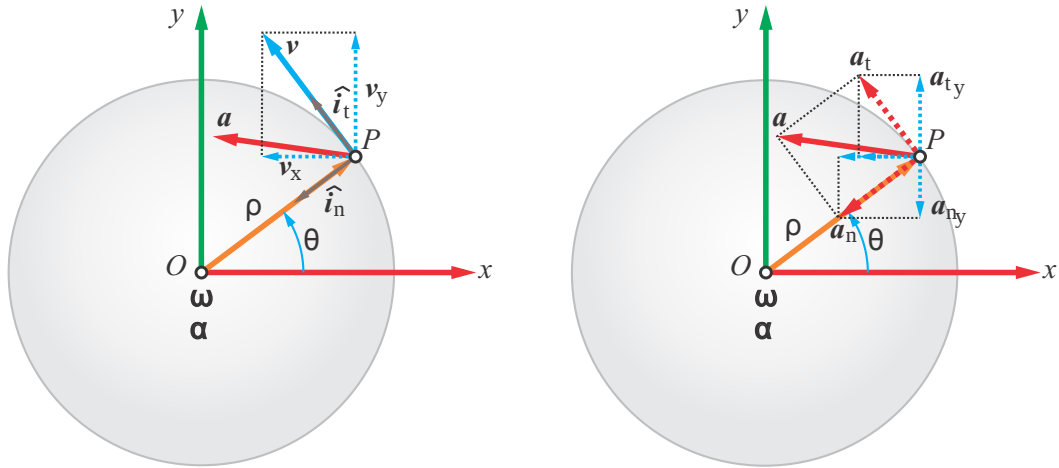


Figura 9.5: Conversión de la velocidad angular (izquierda) y la aceleración angular (derecha) de componentes naturales a componentes cartesianas.

La posición de la partícula se puede expresar por el vector r o por el triplete (r, ϕ, θ) , además definimos a $\rho = r \sin \phi$ como la distancia de la partícula al eje de rotación que dibujamos como BP en la Fig. 9.3 y se lo muestra en una vista normal al eje de rotación en la Fig. . Luego, la posición en coordenadas cartesianas se obtiene como

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad (9.24)$$

La velocidad en coordenadas naturales

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{i}}_t \quad \text{con} \quad v = \omega r \sin \phi = \omega \rho \quad (9.25)$$

y se transforma a coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + \underbrace{v_z}_{=0} \hat{\mathbf{k}} \\ \begin{cases} v_x = -v \sin \theta = -\omega \underbrace{\rho \sin \theta}_y = -\omega y \\ v_y = v \cos \theta = \omega \underbrace{\rho \cos \theta}_x = \omega x \end{cases} \\ \mathbf{v} &= -\omega y \hat{\mathbf{i}} + \omega x \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (9.26)$$

La aceleración en coordenadas naturales

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_t \hat{\mathbf{i}}_t + a_n \hat{\mathbf{i}}_n = \underbrace{\alpha r \sin \phi}_{\rho} \hat{\mathbf{i}}_t + \omega^2 \underbrace{r \sin \phi}_{\rho} \hat{\mathbf{i}}_n \\ &= \underbrace{\alpha \rho}_{a_t} \hat{\mathbf{i}}_t + \underbrace{\omega^2 \rho}_{a_n} \hat{\mathbf{i}}_n \end{aligned} \quad (9.27)$$

que transformada a cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + \underbrace{a_z}_{=0} \hat{\mathbf{k}} \\ \begin{cases} a_x = -a_t \sin \theta - a_n \cos \theta = -\alpha \rho \sin \theta - \omega^2 \rho \cos \theta = -\alpha y - \omega^2 x \\ a_y = a_t \cos \theta - a_n \sin \theta = \alpha \rho \cos \theta - \omega^2 \rho \sin \theta = \alpha x - \omega^2 y \end{cases} \\ \mathbf{a} &= (-\alpha y - \omega^2 x) \hat{\mathbf{i}} + (\alpha x - \omega^2 y) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (9.28)$$

R Nótese que en cada una de las componentes de aceleración convertidas a cartesianas todavía se puede distinguir el término correspondiente a la componente tangencial (afectado de α) y el término correspondiente a la aceleración centrípeta o normal, afectado por ω^2 ; ambos términos multiplicados por coordenadas x y y , que son las distancias normales a los ejes y y x , respectivamente.

Ecuaciones vectoriales del movimiento

Ecuaciones escalares, rotación con eje fijo

Propiedades inerciales de un cuerpo rígido

Problemas directo e inverso
Radio de giro. Cambio de ejes
Productos de inercia, elipsoide de inercia y ejes principales

Cargas exteriores en la rotación con eje fijo

Aplicación a máquinas eléctricas

Efectos de las reacciones estáticas y dinámicas en la rotación

Desequilibrio en cuerpos que rotan con eje fijo
Equilibrado estático y dinámico



10. Cinética de la rotación con eje fijo

10.1 Ecuaciones vectoriales del movimiento

Vimos que en un sistema discreto de partículas de masas Δm_i , en donde la masa total es $m = \sum \Delta m_i$ y $\vec{a}_c$ es la aceleración del centro de masas podemos expresar la segunda Ley de Newton y sus momentos con respecto a un origen arbitrario O como

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i &= \sum \vec{a}_i \Delta m_i = m \vec{a}_c \\ \sum \vec{M}_{Oi} &= \sum (\vec{r}_i \times \vec{a}_i \Delta m_i) \end{cases} \quad (10.1)$$

En el sistema continuo, hacemos tender Δm a cero, y las sumas discretas en las fuerzas efectivas se convierten en integrales

$$\sum \vec{a}_i \Delta m_i \rightarrow \int \vec{a} dm. \quad (10.2)$$

La integral extendida a todo el cuerpo de los diferenciales de masa permite calcular la masa $\int_B dm = m$.

El centro de masas C del cuerpo es un punto de coordenadas $\vec{r}_C$ tal que satisface $\int \vec{r} dm = m \vec{r}_C$, luego la derivada primera de ambos miembros nos permite obtener la relación que satisface la velocidad del centro de masas, $\int \vec{v} dm = m \vec{v}_C$, y derivando nuevamente se obtiene la relación que cumple la aceleración del centro de masas $\int \vec{a} dm = m \vec{a}_C$. Esta última nos permite convertir el sistema discreto (10.1) en uno continuo, obteniéndose

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i &= \int_B \vec{a} dm = m \vec{a}_c \\ \sum \vec{M}_{Oi} &= \int_B (\vec{r} \times \vec{a} dm) \end{cases} \quad (10.3)$$

que es la *ecuación vectorial del movimiento general de un cuerpo rígido*.

En el lado izquierdo de la Ec. (10.3) se tienen fuerzas y momentos resultantes de cargas exteriores activas y reactivas (ejercidas por vínculos que limitan sus movimientos).

- **Fuerzas exteriores:** Pueden ser volumétricas (de acción a distancia) o superficiales por contacto. En el discreto se transmitirían a vínculos internos pero el cuerpo rígido es independiente de fuerzas interiores.
- **Fuerzas efectivas:** El sistema de fuerzas exteriores es *equivalente* al de las fuerzas efectivas $\int \vec{a} dm$ y sus momentos $\int (\vec{r} \times \vec{a} dm)$ en cualquier instante.

Las ecuaciones escalares de la forma general (10.3) en coordenadas cartesianas rectangulares

resultan

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum (F_x)_i & = \int a_x dm = ma_{Cx} \\ \sum (F_y)_i & = \int a_y dm = ma_{Cy} \\ \sum (F_z)_i & = \int a_z dm = ma_{Cz} \\ \sum (M_{Ox})_i = \sum (y F_z - z F_y) & = \int (y a_z - z a_y) dm \\ \sum (M_{Oy})_i = \sum (z F_x - x F_z) & = \int (z a_x - x a_z) dm \\ \sum (M_{Oz})_i = \sum (x F_y - y F_x) & = \int (x a_y - y a_x) dm \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Vamos a particularizar las ecuaciones escalares (10.4) para la rotación con eje fijo:

- Sea un sistema de coordenadas $Oxyz$ fijo a un cuerpo que rota, donde z coincide con el eje de rotación Z absoluto de una terna $OXYZ$.
- La posición de una partícula $P(x, y, z)$ que rota con el sistema móvil $Oxyz$ tiene las coordenadas (x, y, z) que no se modifican con el movimiento.
- En lo absoluto, la partícula se mueve sobre una trayectoria circular de radio $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, y como vimos en la cinemática, tiene aceleración en función de ω y α sin componente en el eje Z , dadas por:

$$\begin{aligned} a_x &= -\alpha y - \omega^2 x \\ a_y &= \alpha x - \omega^2 y \\ a_z &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

10.1.1 Ecuaciones escalares, rotación con eje fijo

Reemplazando estas aceleraciones de (10.5) en (10.4), en donde ω y α no dependen de las coordenadas del punto y quedan como factores comunes en sus términos, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum F_x & = \int (-\alpha y - \omega^2 x) dm = -\alpha \int y dm - \omega^2 \int x dm \\ \sum F_y & = \int (\alpha x - \omega^2 y) dm = \alpha \int x dm - \omega^2 \int y dm \\ \sum F_z & = 0 \\ \sum M_{Ox} = \sum (y F_z - z F_y) & = \int (y a_z - z a_y) dm = -\alpha \int x z dm + \omega^2 \int y z dm \\ \sum M_{Oy} = \sum (z F_x - x F_z) & = \int (z a_x - x a_z) dm = -\alpha \int y z dm - \omega^2 \int x z dm \\ \sum M_{Oz} = \sum (x F_y - y F_x) & = \int (x a_y - y a_x) dm = \alpha \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{\rho^2} \end{array} \right. \quad (10.6)$$

En el lado derecho se observan dos términos que son las componentes tangencial y normal de la resultante de las fuerzas efectivas y del momento de dichas fuerzas, para todas las partículas del cuerpo.

Estas ecuaciones relacionan cargas exteriores (activas y reactivas) con las magnitudes cinemáticas del movimiento angular, a través de la distribución de masa propia de cada cuerpo. A continuación, analizaremos las integrales que aparecen en el lado derecho de (10.6).

10.2 Propiedades inerciales de un cuerpo rígido

La distribución de masa propia de cada cuerpo define *propiedades inerciales del cuerpo* referidas al sistema de ejes adoptado con distintos órdenes, que para simplificar el estudio lo particularizaremos para el ejemplo de rotación con eje fijo:

- **Momentos de primer orden:** Momentos estáticos, productos de la masa elemental por su distancia normal a un plano coordenado.

$$\begin{cases} S_x &= \int x dm = x_c m \\ S_y &= \int y dm = y_c m \end{cases}$$

- **Momentos de segundo orden:** Momentos centrífugos o productos de inercia. Son productos de la masa elemental por sus distancias normales a dos planos coordenados.

$$\begin{cases} I_{xz} = \int xz \, dm \\ I_{yz} = \int yz \, dm \end{cases}$$

- **Momento de inercia:** Es el producto de la masa elemental por el cuadrado de su distancia a un eje.

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm = \int \rho^2 \, dm$$

Ahora podemos sustituir estas propiedades en las ecuaciones del movimiento para la rotación con eje fijo (10.6), obteniendo una forma más compacta sin integrales

$$\begin{cases} \sum F_x &= -S_y \alpha - S_x \omega^2 = -m y_C \alpha - m x_C \omega^2 \\ \sum F_y &= S_x \alpha - S_y \omega^2 = m x_C \alpha - m y_C \omega^2 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M_{Ox} = \sum (y F_z - z F_y) &= -I_{xz} \alpha + I_{yz} \omega^2 \\ \sum M_{Oy} = \sum (z F_x - x F_z) &= -I_{yz} \alpha - I_{xz} \omega^2 \\ \sum M_{Oz} = \sum (x F_y - y F_x) &= I_{zz} \alpha \end{cases} \quad (10.7)$$

10.2.1 Problemas directo e inverso

En forma general, tenemos 6 variables de carga $F_x, F_y, F_z, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$ y 6 variables de movimiento $a_x, a_y, a_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$.

En la rotación con eje fijo la única variable de movimiento es $\alpha_z = \alpha$ y las otras serán variables de vínculo, y la única *ecuación escalar para la rotación con eje fijo* es

$$\sum M_{Oz} = I_{zz} \alpha \quad (10.8)$$

donde, considerando a la propiedad inercial I_{zz} como conocida, surgen dos tipos de problemas (análogos a los de traslación rectilínea en donde la masa es dato):

- **Problema directo:** Conocida la función $\theta(t)$, $\omega(t)$, o $\alpha(t)$, se desea hallar el valor resultante de los momentos de los pares exteriores $\sum M_{Oz}$ respecto al eje de rotación.
- **Problema inverso:** Conocida la resultante de los momentos de los pares exteriores $\sum M_{Oz}$ respecto al eje de rotación como función del tiempo, se busca determinar las funciones $\theta(t)$, $\omega(t)$, y $\alpha(t)$ cuando se proveen las condiciones iniciales o de contorno para la integración.

En algunos problemas de diseño, la incógnita puede ser la propiedad inercial I_{zz} .

R Cabe mencionar que las integrales de propiedades inerciales se pueden obtener fácilmente utilizando la descripción geométrica en sistemas de diseño asistido por computador (CAD) teniendo el cuidado de ingresar bien las unidades dimensionales y de densidad del material.

10.2.2 Radio de giro. Cambio de ejes

Podemos realizar un análisis más profundo de las propiedades inerciales de un cuerpo referidas al sistema de ejes adoptado

- **Radio de giro o de inercia:**

Es una propiedad global que indica rápidamente la relación entre la inercia y la masa

$$I = i^2 m \rightarrow i = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

■ **Teorema de Steiner o de los ejes paralelos**

Permite obtener el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje $E - E$, conociendo la inercia I' del cuerpo con respecto a un eje paralelo $E' - E'$, separado a una distancia d del anterior

$$I = I' + d^2 m$$

donde, m es la masa del cuerpo.

■ **Cuerpos delgados de material homogéneo**

Un cuerpo que repite su forma geométrica plana (con un momento de inercia de área J) a lo largo de una directriz de eje EE y de espesor t que forma con dicha área un diferencial de volumen dV con densidad constante ρ , tal que $dm = \rho dV$, define un momento de inercia del cuerpo que se puede calcular como

$$I_{EE,masa} = J_{EE,area} \rho t$$

Por ejemplo, conociendo el momento de inercia de área J_x de una sección que trasladada en una dirección normal a la misma permite definir un cuerpo de espesor t , se calcula como $I_x = J_x \rho t$.

■ **Cuerpos compuestos** (aditividad de la inercia)

Si un cuerpo se puede dividir en dos volúmenes A y B , y se pueden determinar los momentos de inercia con respecto a un mismo eje $E - E$, la inercia total de la unión de las partes es la suma de las inercia de cada una, es decir:

$$I_{EE} = I_{EE}^A + I_{EE}^B$$

Esto nos permite dividir un cuerpo en formas geométricas con cálculo de momento de inercia simple y luego sumarlos algebraicamente.

10.2.3 Productos de inercia, elipsoide de inercia y ejes principales

La forma general de la ecuación del movimiento con respecto a una terna de ejes ortogonales con origen en el centro de masas tiene una expresión vectorial:

$$\boxed{\sum M_{Oz} = I \alpha} \quad (10.9)$$

en donde la matriz I de tamaño 3×3 se denomina *Tensor de Inercia*

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Además, en analogía con el vector momentum lineal (mv), se define el *vector momentum angular*, también llamado *momento cinético*, que en tres dimensiones se puede expresar como el producto del tensor de inercia y el vector de velocidad angular.

$$H = I \omega \quad (10.11)$$

de modo que la segunda ley de Newton para la rotación expresa que los momentos aplicados sobre un cuerpo rígido son iguales a la tasa de cambio del momento cinético

$$\sum M_{Oz} = \dot{H} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (10.12)$$

Si el tensor de inercia es constante en tiempo, se lo puede factorizar de la derivación del miembro derecho. Luego, utilizando la notación $\dot{\omega} = \alpha$, la (10.12) se transforma en (10.9).

Se puede demostrar que el tensor de inercia tiene ciertas propiedades que se estudian en un curso básico del álgebra lineal [Ant01]. Es tensor es simétrico y definido positivo. Sus autovalores

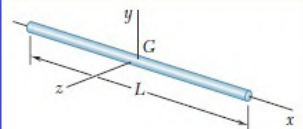
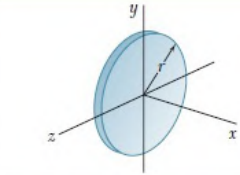
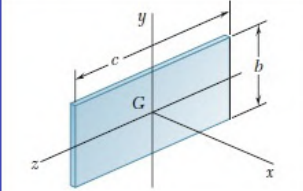
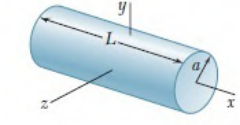
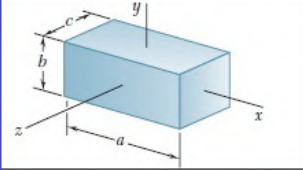
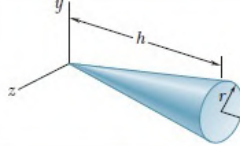
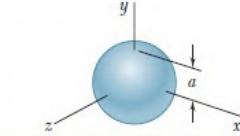
	$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
			$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Figura 10.1: Momentos de inercia en ejes principales para cuerpos que son primitivas regulares.

son reales y sus autovectores permiten diagonalizarlo siempre mediante una transformación de similitud. Sus autovectores son los ejes principales del cuerpo rígido y los elementos diagonales son los momentos principales de inercia. En la Figura 10.1 se muestran momentos de inercia en función de las dimensiones características de algunos cuerpos geométricos regulares [Hib96]. Si cada autovector v_i satisface $Iv_i = I_i v_i$, para $i = 1, 2, 3$, se puede formar a la matriz P de tamaño 3×3 como $P = [v_1, v_2, v_3]$, en donde sus tres columnas consisten de los autovectores del tensor de inercia I . Multiplicando a la matriz con autovectores por el tensor de inercia,

$$IP = [I_1 v_1, I_2 v_2, I_3 v_3] = PI^D$$

el resultado coincide con la aplicación del tensor a una matriz diagonal I^D conteniendo en su diagonal a los autovalores. Claramente, se puede despejar dicha matriz diagonal mediante la transformación de similitud $P^{-1}IP$ que diagonaliza a I (usaremos $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{x, y, z\}$)

$$\begin{aligned} I^D &= P^{-1}IP = \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.13)$$

En muchos problemas de análisis dinámico de cuerpos rígidos vinculados (máquinas y mecanismos) conviene utilizar la descripción de la inercia de cada cuerpo rígido considerando una terna local con origen ubicado en su centro de masas y alineada con las direcciones principales de inercia. Debido a que el tensor de inercia permanece constante en dicha terna local, se eliminan términos y complejidad para resolver la ecuación del movimiento.

R Note además que el tensor de inercia aplica linealmente sobre el vector de velocidad angular, $H = I\omega$, de modo que el momento cinético H sólo tendrá la misma dirección que el vector velocidad angular ω cuando el vector velocidad angular coincida en dirección con un autovector del tensor de inercia del cuerpo. Esto último se requiere para las máquinas rotando con eje fijo.

Si tenemos un eje OE pasando por un punto O de un cuerpo y con dirección definida por el versor

$\hat{e}$, como muestra la Figura 10.2, el momento de inercia del cuerpo con respecto a dicho eje será la integral de los productos de las masas diferenciales por las distancias al eje.

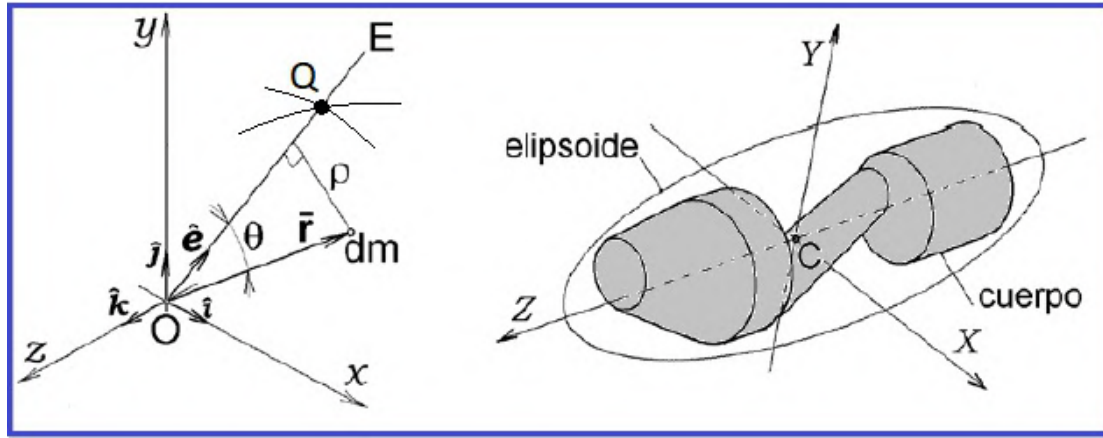


Figura 10.2: Momentos de inercia de un cuerpo arbitrario con respecto a un eje OE .

Si la masa diferencial tiene coordenada $\vec{r}$ y posee un ángulo interno θ con $\hat{e}$, luego, el momento de inercia del cuerpo será

$$I_{OE} = \int \rho^2 dm = \int (r \sin \theta)^2 dm = \int (|\hat{e} \times \vec{r}|)^2 dm \quad (10.14)$$

Desarrollando el producto vectorial en coordenadas cartesianas, con $\hat{e} = (e_x, e_y, e_z)$ y $\vec{r} = (x, y, z)$, y elevando al cuadrado se obtiene la expresión

$$I_{OE} = e_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + e_y^2 \int (x^2 + z^2) dm + e_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2e_x e_y \int xy dm - 2e_x e_z \int xz dm - 2e_y e_z \int yz dm \quad (10.15)$$

en donde se identifican los momentos de inercia de segundo orden y los productos de inercia

$$I_{OE} = e_x^2 I_{xx} + e_y^2 I_{yy} + e_z^2 I_{zz} - 2e_x e_y I_{xy} - 2e_x e_z I_{xz} - 2e_y e_z I_{yz} \quad (10.16)$$

Si esta expresión es multiplicada miembro a miembro por

$$\frac{1}{I_{OE}} = \frac{1}{\sqrt{I_{OE}}} \frac{1}{\sqrt{I_{OE}}}$$

se obtiene la forma cuadrática normalizada denominada *elipsoide de inercia*. El escalar $q = \frac{1}{\sqrt{I_{OE}}}$ es multiplicado por el vector dirección $\hat{e}$ y su extremo define un punto Q de coordenadas $x = e_x q, y = e_y q, y z = e_z q$ sobre el elipsoide. La superficie se genera al adquirir $\hat{e}$ todas las direcciones posibles.

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} - 2xy I_{xy} - 2xz I_{xz} - 2yz I_{yz} = 1 \quad (10.17)$$

Este elipsoide es una propiedad única e invariante que puede calcularse para cualquier cuerpo, incluso carente de toda simetría, y sólo depende del origen O elegido del cuerpo. El elipsoide tiene como centro de simetría a O , tiene 3 ejes de simetría ortogonales llamados *ejes principales* definidos por la intersección de los *planos principales*. Además, se tienen las siguientes características:

- Si un cuerpo tiene un eje o plano de simetría, este eje o plano es principal de inercia.
- Si un cuerpo tiene una plano de simetría, toda recta perpendicular al plano será eje principal de inercia en el punto de intersección (si el punto es C será central principal).

- Si el centro O del elipsoide coincide con el centro de masas C del cuerpo, se lo llama *elipsoide central de inercia*, sus ejes y planos de simetría son ejes y planos principales de inercia.
- Eligiendo un sistema $Oxyz$ coincidente con los ejes principales del elipsoide, se satisface

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} = 1$$

porque $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

- Los diámetros de los elipsoides indican el valor relativo inverso de los momentos de inercia en las diferentes direcciones. Si los diámetros son $d_1(x) \leq d_2(y) \leq d_3(z)$, el diámetro mayor indica que I_{zz} es mínimo, el diámetro menor indica que I_{xx} es máximo. Note que cada diámetro en dirección $E-E$ tiene longitud $2q$ con $q = \frac{1}{\sqrt{I_{OE}}}$.

R La inercia I_{OE} en un eje determinado $\hat{e}$ también puede verse como la proyección sobre dicho eje de la acción de la aplicación lineal $\mathbf{I} \cdot \hat{e}$ del tensor inercia sobre dicho versor. Es decir,

$$I_{OE} = \hat{e} \cdot (\mathbf{I} \cdot \hat{e}).$$

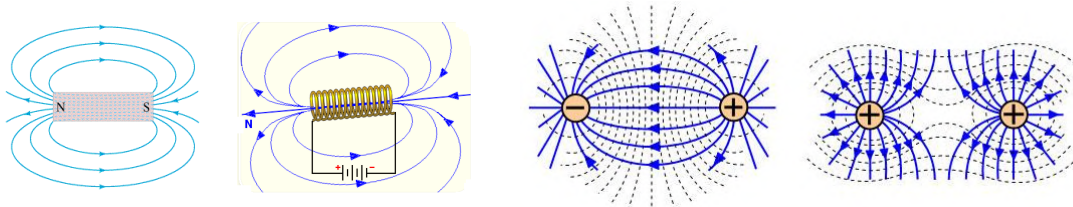
Si el versor tiene la dirección de la velocidad angular, es decir, $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}$, la proyección de $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ sobre $\boldsymbol{\omega}$ es proporcional a la energía cinética rotacional

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

10.3 Cargas exteriores en la rotación con eje fijo

Las cargas exteriores en la rotación con eje fijo pueden ser de diversa naturaleza:

- Cargas exteriores a distancia (provocan fuerzas volumétricas)
 1. Fuerza de gravedad, debida al campo gravitatorio (casi homogéneo).
 2. Fuerzas electrostáticas o electromagnéticas, debidas a campos eléctricos y magnéticos que no son homogéneos y producen fuerzas variables en magnitud y dirección.



- Cargas por contacto: en máquinas rotativas se busca que produzcan un par puro con resultante de fuerza nula, se transmiten por ejemplo entre el acople del eje de una turbina con el eje de un generador eléctrico.

10.3.1 Aplicación a máquinas eléctricas

En las máquinas eléctricas como motores y generadores puede identificarse una nomenclatura en común para los pares de fuerza actuantes sobre un rotor.

M_i **Par inducido o interno:** generado por las fuerzas electromagnéticas de atracción y repulsión que el inductor ejerce (a distancia) sobre el inducido.

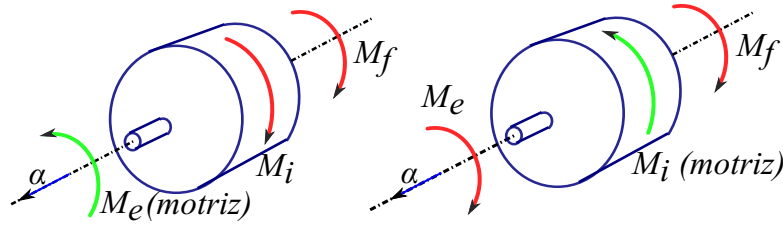
M_f **Par de rozamiento:** debido a rozamientos mecánicos por fricción o viscosos por ventilación.

M_e **Par exterior:** proveniente de otra máquina o dispositivo, proveedor o receptor de energía.

M_α **Par acelerador:** resultante de todos los pares $M_\alpha = \sum M_{Oz} = I_{zz} \alpha$.

Assumiendo una máquina perfectamente equilibrada y según muestra la Figura 10.3.1, la ecuación del movimiento para un generador es

$$M_\alpha = M_e - M_r = M_e - (M_i + M_f) = I_{zz} \alpha$$



mientras que para el *motor* es

$$M_\alpha = M_i - M_r = M_i - (M_e + M_f) = I_{zz}\alpha$$

En la rotación con eje fijo, existen dos clases de reacciones de vínculo:

1. **Reacciones estáticas:** Debidas a fuerzas activas sobre el cuerpo, esté en movimiento o no.
2. **Reacciones dinámicas:** Debidas al movimiento y a fuerzas efectivas.

Los vínculos restringen movimientos en direcciones no deseados mediante reacciones que evitan desplazamientos (de traslación o de rotación) en las direcciones restringidas. Las reacciones son 3 fuerzas ortogonales y 2 momentos en ejes ortogonales al del giro permitido.

Las reacciones estáticas en apoyos deben oponerse constantemente al peso propio W , conviene calcularlas mediante métodos de la estática y separadas de las dinámicas.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= A_x = B_x = 0 \\ \sum F_y &= A_y + B_y - W = 0 \\ \sum F_z &= A_z - P_z = 0\end{aligned}\tag{10.18}$$

Y de las ecuaciones de momento se puede determinar que $A_y = B_y = W/2$ y $A_z = P_z$. Existe P_z cuando el rotor está inclinado o es vertical.

10.4 Efectos de las reacciones estáticas y dinámicas en la rotación

En problemas de desequilibrio, analizaremos las consecuencias de que la distribución de masas no se corresponda con la utilizada al ser diseñado un elemento rotante. La solución a este problema se denomina *balanceo* y consiste en redistribuir masas (agregar o quitar) para un propósito y performance dadas. Para rotación con eje fijo, las consecuencias de desalineamiento del centro de masas y de los ejes principales, son de notable importancia.

En la Figura 10.3, la distancia entre apoyos es L y el punto de reducción de momentos O coincide con A . Por conveniencia, las reacciones dinámicas se calculan en un marco rotante fijo al cuerpo.

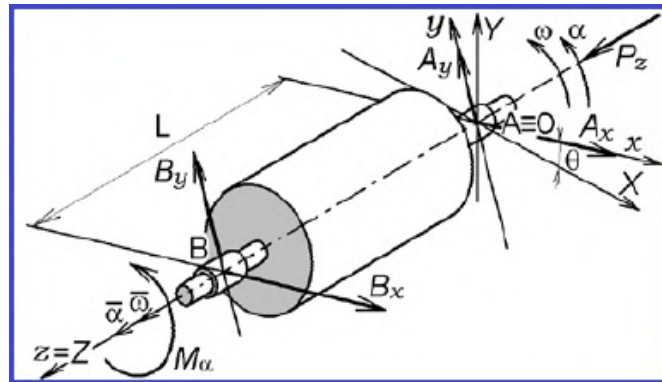


Figura 10.3: Reacciones dinámicas en ejes rotantes xyz , el marco fijo es XYZ .

Para obtener la expresión de las reacciones dinámicas como función de α , ω y de los parámetros

inerciales se utiliza la ecuación del movimiento

$$\begin{cases} \sum F_x = A_x + B_x = -S_y\alpha - S_x\omega^2 = -m y_C\alpha - m x_C\omega^2 \\ \sum F_y = A_y + B_y = S_x\alpha - S_y\omega^2 = m x_C\alpha - m y_C\omega^2 \\ \sum F_z = A_z - P_z = 0 \\ \sum M_{Ox} = -L B_y = -I_{xz}\alpha + I_{yz}\omega^2 \\ \sum M_{Oy} = L B_x = -I_{yz}\alpha - I_{xz}\omega^2 \\ \sum M_{Oz} = M_\alpha = I_{zz}\alpha \end{cases} \quad (10.19)$$

Asumimos que el eje no está perfectamente horizontal, y aparece en la tercer ecuación una componente de reacción con dirección z en A , dicha una carga axial que debe ser equilibrada por la reacción, es decir

$$A_z = P_z$$

Para despejar el valor de las reacciones, B_y se despeja de la 4ta ecuación

$$B_y = \frac{I_{xz}}{L}\alpha - \frac{I_{yz}}{L}\omega^2$$

B_x se despeja de la 5ta

$$B_x = -\frac{I_{yz}}{L}\alpha - \frac{I_{xz}}{L}\omega^2$$

ésta se reemplaza en la primera para obtener

$$A_x = \left(\frac{I_{yz}}{L} - m y_C\right)\alpha + \left(\frac{I_{xz}}{L} - m x_C\right)\omega^2$$

En la segunda se reemplaza a B_y

$$A_y = -\left(\frac{I_{xz}}{L} - m x_C\right)\alpha + \left(\frac{I_{yz}}{L} - m y_C\right)\omega^2$$

De este modo se han calculado las cinco condiciones de vínculo que se producen cuando hay movimiento y se suman a las cargas estáticas. Nótese que en un proceso de arranque de una máquina eléctrica, $\alpha \neq 0$ y $\omega \neq 0$, existen componentes tangenciales y centrípetas en las reacciones y en régimen a velocidad angular constante, $\alpha = 0$ y $\omega = \text{cte}$, se preservan los términos dependientes de la aceleración centrípeta, es decir

$$\begin{cases} B_x = -\frac{I_{xz}}{L}\omega^2 \\ B_y = -\frac{I_{yz}}{L}\omega^2 \\ A_x = \left(\frac{I_{xz}}{L} - m x_C\right)\omega^2 \\ A_y = \left(\frac{I_{yz}}{L} - m y_C\right)\omega^2 \end{cases} \quad (10.20)$$

Entre los efectos de las reacciones estáticas, por ejemplo, las reacciones al peso propio del rotor, se tiene:

1. Pérdidas de energía por fricción en soportes (cojinetes y rodamientos).
2. Producción de calor.
3. Desgaste en soportes.

Como las reacciones estáticas son previsible desde el diseño, estos efectos se minimizan y controlan con un plan de mantenimiento predictivo y preventivo de los elementos de máquinas. Este plan de mantenimiento y el monitoreo es crítico en las reacciones dinámicas, por ejemplo, en turbinas de

vapor se monitorean permanentemente a las vibraciones y la temperatura de elementos de apoyos, tomando acciones correctivas cuando exceden de ciertos límites.

Entre los efectos de las reacciones dinámicas, se recargan los mismos efectos ya enumerados para las reacciones estáticas agravados por el carácter rotante de las mismas y que pueden producir momentos en ejes ortogonales al rotor:

1. Pérdidas de energía por fricción, producción de calor y desgaste en soportes, debido a fuerzas que son proporcionales al cuadrado de la velocidad angular.
2. La deformabilidad de los soportes y el carácter rotante de las reacciones dinámicas hace que se produzcan vibraciones transmitidas del cuerpo rotante a los apoyos.
3. Las vibraciones producen ruidos que pueden afectar la salud de personas cercanas a la máquina.
4. Se pueden producir roturas por fatiga del material de los soportes.
5. Si el cuerpo rotante desbalanceado pertenece a una máquina herramienta, la vibración afecta a la calidad de la producción.
6. Si la frecuencia de las vibraciones coincide con la frecuencia natural de partes de esa máquina, debido a la resonancia se amplificarán las vibraciones y pueden tener un efecto destructivo, aflojar elementos de unión, romperlos, poner en peligro a personas.

Cabe mencionar que en ciertas máquinas como zarandeadoras, compactadoras de suelos y máquinas vibratorias, el desequilibrio es deseado; debe ser controlado y se debe proteger adecuadamente a los operarios de las mismas.

10.4.1 Desequilibrio en cuerpos que rotan con eje fijo

- Desequilibrio estático: Ocurre cuando el centro de masas no está ubicado sobre el eje de rotación, $x_C \neq 0$ y/o $y_C \neq 0$. El eje está *excéntrico* y afortunadamente se puede identificar sin poner a la máquina en movimiento, apoyandola simplemente sobre fulcros con mínimo rozamiento. El cuerpo gira sólo accionado por el peso propio que actúa sobre su centro de masas excéntrico. Liberado el cuerpo desde cualquier posición angular, el cuerpo gira hasta la misma posición. En dicha posición se marca una línea para compensar y ubicar el centro de masas coincidente con el eje. Se agregan masas en la línea marcada en posición opuesta al punto más bajo. Una vez que el centro de masas coincide con el eje, para cualquier posición angular en que se libere el cuerpo, la fuerza peso no lo hará rotar y se quedará en reposo; se dice que está *estáticamente equilibrado*. Note que el procedimiento de corrección es estático pero las reacciones que se producen en funcionamiento son dinámicas.
- Desequilibrio dinámico: Ocurre cuando el eje central principal de inercia está *desviado* con respecto al eje de rotación, $I_{xz} \neq 0$ y/o $I_{yz} \neq 0$. Esto no se puede detectar con el rotor en reposo. El cálculo de productos de inercia sólo puede realizarse para conjuntos de masa puntuales o cuerpos de forma muy simple. El desequilibrado dinámico produce fuerzas y además momentos que cargan los apoyos. Su identificación se realiza mediante acelerómetros y transductores de desplazamiento que se colocan en cada apoyo en cada dirección de las componentes. Luego, las señales se procesan para identificar las posiciones angulares en que deben colocarse pesos para anular a los productos de inercia.

En el equilibrado de rotores primero se procede a realizar el equilibrado estático, para lo cual se requiere desmontar el rotor de sus apoyos, y luego proceder al equilibrado dinámico.

10.4.2 Equilibrado estático y dinámico

El propósito del equilibrado (balanceado o compensación) es eliminar las reacciones dinámicas o reducirlas a un mínimo admitido por una tolerancia especificada. Continuando con el ejemplo anterior, el objetivo es anular simultáneamente

$$x_C = y_C = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Desde el diseño de la máquina rotante (rotor de máquina eléctrica, rotor de turbina de gas, etc) se prevén planos perpendiculares al eje de rotación (planos de equilibrado o de corrección) en que se facilita el agregado y quitado de masas.

- Equilibrado en 1 plano: Útil para el caso de desequilibrio estático y cuando es posible disponer de un plano de corrección que pase por el centro de masas, por ejemplo, en el plano medio de un disco delgado o en un volante. Una vez identificada la posición del centro de masas C , se lo

gira 90 grados para deducir el valor de masa m' a agregar en el lado opuesto al del centro de masa y la distancia $-r'$ al eje para que anule el momento estático de primer orden:

$$m r_C + m' r' = 0 \rightarrow m' (-r') = m r_C$$

También es posible quitar una masa m' del lado del centro de masa, ubicada a una distancia r' del mismo lado del centro de masa

$$m r_C + m' r' = 0 \rightarrow (-m') r' = m r_C$$

El producto $m r$ se considera como valor de desequilibrio y se mide en Kgm o en gmm. El equilibrado estático también se puede realizar convenientemente en dos planos.

- **Equilibrado en 2 planos:** Consiste en lograr que el principal de inercia del cuerpo coincida con el eje de rotación. Si el cuerpo está estáticamente equilibrado, se debe lograr que el eje principal de inercia sea central. Asumiendo que el cuerpo está estáticamente equilibrado, en cada apoyo se relevan las magnitudes de las reacciones. Midiendo las componentes de las reacciones en cada plano de compensación, conocida la velocidad de régimen y la distancia entre apoyos o planos, se pueden calcular las masas necesarias para anular dichas reacciones.

El equilibrado debe satisfacer tolerancias que indican el grado de precisión de la máquina rotativa.

Para proveer un ejemplo de los casos de equilibrio se puede utilizar un sistema de dos masas puntuales, de modo que los momentos estáticos y productos de inercia se pueden calcular fácilmente, prescindiendo de las integrales, procediendo en forma discreta como

$$I_{xz} = \sum x_i z_i m_i = x_1 z_1 m_1 + x_2 z_2 m_2$$

y

$$I_{yz} = \sum y_i z_i m_i = y_1 z_1 m_1 + y_2 z_2 m_2.$$

Las masas se disponen en el plano yOz donde $x_1 = x_2 = x_C = 0$ e $I_{xz} = 0$. Las ecuaciones para las reacciones (10.20) se reducen a

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{I_{yz}}{L} \omega^2 \\ A_x = 0 \\ A_y = \left(\frac{I_{yz}}{L} - m y_C \right) \omega^2 \end{cases} \quad (10.21)$$

En la Figura 10.4 se muestran 4 combinaciones posibles de estados de equilibrio

1. *Estáticamente equilibrado y dinámicamente equilibrado:* Los productos de inercia y las reacciones se anulan.
2. *Estáticamente desequilibrado y dinámicamente equilibrado:* Los productos de inercia no se anulan y afectan a las reacciones. Como el procedimiento es compensar primero el momento estático de primer orden haciendo coincidir el centro de masas con el eje de rotación, los productos de inercia se anularían y no se requiere equilibrado dinámico.
3. *Estáticamente equilibrado y dinámicamente desequilibrado:* El centro de masas pasa por el eje de rotación pero el eje de rotación no coincide con un eje principal de inercia. Se requerirá de equilibrado dinámico solamente.
4. *Estáticamente desequilibrado y dinámicamente desequilibrado:* El centro de masas pasa por el eje de rotación y el eje de rotación no coincide con un eje principal de inercia. Se requiere de ambos equilibrados.

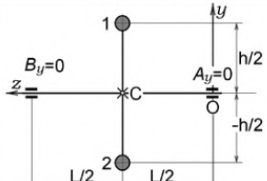
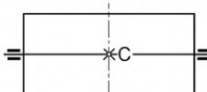
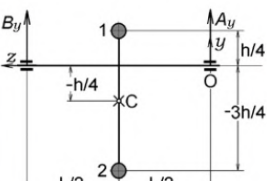
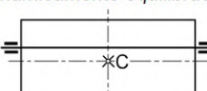
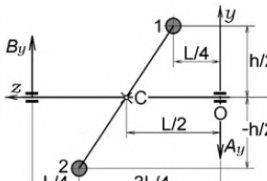
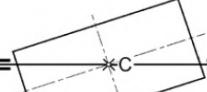
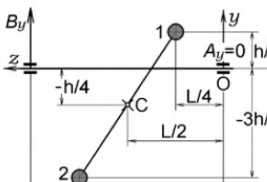
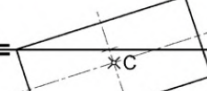
No.	Disposición	Cálculo	Comportamiento
1)		$y_1=h/2$ $y_2=-h/2$ $y_C=0$ $z_1=L/2$ $z_2=L/2$ $z_C=L/2$ $I_{yz} = \frac{h}{2} \frac{L}{2} m - \frac{h}{2} \frac{L}{2} m = 0$ $I_{yz} = 0$ $A_y = 0$ $B_y = 0$	Estáticamente equilibrado Dinámicamente equilibrado  (El eje de rotación es eje principal central de inercia)
2)		$y_1=h/4$ $y_2=-3h/4$ $y_C=-h/4$ $z_1=L/2$ $z_2=L/2$ $z_C=L/2$ $I_{yz} = \frac{h}{4} \frac{L}{2} m - 3 \frac{h}{4} \frac{L}{2} m = -\frac{1}{8} h L m$ $I_{yz} = -\frac{1}{8} h L m$ $A_y = (-\frac{1}{8} h m + \frac{h}{4} m) \omega^2 = \frac{1}{8} h m \omega^2$ $A_y = \frac{1}{8} h m \omega^2$ $B_y = \frac{1}{8} h m \omega^2 = A_y$ $B_y = \frac{1}{8} h m \omega^2$	Estáticamente desequilibrado Dinámicamente equilibrado  (El eje de rotación es eje principal no central de inercia)
3)		$y_1=h/2$ $y_2=-h/2$ $y_C=0$ $z_1=L/4$ $z_2=3L/4$ $z_C=L/2$ $I_{yz} = \frac{h}{2} \frac{L}{4} m - \frac{h}{2} \frac{3L}{4} m = -\frac{1}{8} h L m$ $I_{yz} = -\frac{1}{8} h L m$ $A_y = (-\frac{1}{8} h m + 0) \omega^2 = -\frac{1}{8} h m \omega^2$ $A_y = -\frac{1}{8} h m \omega^2$ $B_y = \frac{1}{8} h m \omega^2 = -A_y$ $B_y = \frac{1}{8} h m \omega^2$	Estáticamente equilibrado Dinámicamente desequilibrado  (El eje de rotación es eje central no principal de inercia)
4)		$y_1=h/4$ $y_2=-3h/4$ $y_C=-h/4$ $z_1=L/4$ $z_2=3L/4$ $z_C=L/2$ $I_{yz} = \frac{h}{4} \frac{L}{4} m - 3 \frac{h}{4} \frac{3L}{4} m = -\frac{1}{4} h L m$ $I_{yz} = -\frac{1}{4} h L m$ $A_y = (-\frac{1}{4} h m + \frac{h}{4} m) \omega^2 = 0$ $A_y = 0$ $B_y = \frac{1}{4} h m \omega^2$ $B_y = \frac{1}{4} h m \omega^2$	Estáticamente desequilibrado Dinámicamente desequilibrado  (El eje de rotación es eje no central y no principal de inercia)

Figura 10.4: Ejemplos de estados de equilibrio para un sistema simple de dos masas puntuales, cálculo del producto de inercia y de las dos componentes de las reacciones.

11. Más leyes en la rotación

En capítulos anteriores hemos visto que se pueden obtener varias leyes desde la 2da Ley de Newton despejando dicha ecuación diferencial de diversas formas, conduciendo a la expresión de la Ley de impulso y cantidad de movimiento y la Ley de trabajo y energía. Idénticamente se procede con las ecuaciones para la rotación. Por simplicidad, nos restringiremos a la rotación con eje fijo.

11.1 Ley de impulso y cantidad de movimiento para un cuerpo rígido

Para deducir la Ley de impulso y de la cantidad de movimiento en la rotación simplemente se toman momentos de las fuerzas y momentos de los vectores diferenciales de impulso $v dm$, ambos con respecto al mismo punto de reducción O :

- F_k es una fuerza exterior, activa o reactiva;
- r_k es su vector posición con referencia en O ,
- $k = 1 \dots N$ con N número total de fuerzas externas sobre el cuerpo $\mathcal{B}$

$$\text{lineal: } \underbrace{\sum_{k=1}^N \int_1^2 F_k dt}_{J_{12}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} v dm \Big|_2}_{L_2} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} v dm \Big|_1}_{L_1} = \Delta L$$

$$\text{angular: } \underbrace{\sum_{k=1}^N \int_1^2 (r_k \times F_k) dt}_{Y_{12}^0} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (r_k \times v) dm \Big|_2}_{H_2^0} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (r_k \times v) dm \Big|_1}_{H_1^0} = \Delta H^0$$

R El impulso de la resultante de las fuerzas externas, y los impulsos de los momentos de esas fuerzas, son iguales a los cambios de las cantidades de movimiento lineal y angular, respectivamente.

Para la ecuación de impulso angular y momento cinético para la rotación con eje fijo se considera que la velocidad angular es $\omega = \omega \hat{k}$:

- Se considera el eje Oz y la rotación como único movimiento posible;
- $r_k = x\hat{i} + y\hat{j}$ es su vector posición con referencia en O ,
- $v_k = \omega \times r_k = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-\omega y)\hat{i} + (\omega x)\hat{j}$ es la velocidad

$$\begin{aligned}
\sum_k \int_1^2 (M_z^0)_k dt &= \sum_k \int_1^2 (x F_y - y F_x)_k dt = \int_{\mathcal{B}} (x \underbrace{v_y}_{\omega x} - y \underbrace{v_x}_{-\omega y}) dm \Big|_2 - \int_{\mathcal{B}} (x \underbrace{v_y}_{\omega x} - y \underbrace{v_x}_{-\omega y}) dm \Big|_1 \\
&= \omega \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) dm \Big|_2 - \omega \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) dm \Big|_1 \\
&= \underbrace{I_{zz}}_2 \omega - \underbrace{I_{zz}}_1 \omega = \Delta(I_{zz} \omega) = \Delta H_z^0
\end{aligned}$$

Donde $H_z^0 = I_{zz} \omega$ es el momento cinético o cantidad de movimiento angular; tiene el signo de la velocidad angular.

La equivalente a una segunda Ley de Newton para la rotación 3D:

R La suma de los momentos de las fuerzas externas es igual a la tasa de cambio del momento cinético

$$\sum_k (M_z^0)_k = \dot{H}^0 = \frac{d(H^0)}{dt} \quad \text{con} \quad H^0 = I \omega$$

en ejes principales de inercia, I es diagonal y constante.
Para eje fijo, separando variables e integrando

$$\begin{aligned}
M_z^0 &= \frac{d(H_z^0)}{dt} \rightarrow M_z^0 dt = I_{zz} d\omega \\
\int_1^2 M_z^0 dt &= \int_1^2 I_{zz} d\omega = I_{zz} \omega|_2 - I_{zz} \omega|_1 = \Delta H_z^0
\end{aligned}$$

también se obtiene la Ley del Impulso y cantidad de movimiento angular.

11.1.1 Unidades y cálculo del impulso angular

- La unidad del impulso angular es $([M][L][T]^{-2} \cdot [L])[T] = (\text{N} \cdot \text{m})\text{s}$.
- La unidad del momento cinético es $[M][L]^2[T]^{-1} = \frac{(\text{Kg} \cdot \text{m}^2)}{\text{s}}$.

Cálculo del impulso:

- Momento constante: $Y_{12} = \int M dt = M(t_2 - t_1) = M \Delta t = I \omega_2 - I \omega_1$
- Momento variable: $Y_{12} = \int M(t) dt \approx M_m \Delta t = I \omega_2 - I \omega_1$

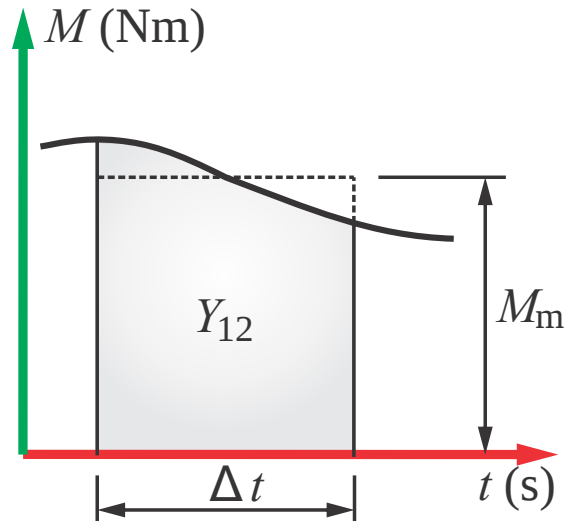
11.2 Ley de trabajo y energía cinética en la rotación

- $\mathbf{F}_k$ es una fuerza exterior activa;
- $\mathbf{r}_k$ es su vector posición con referencia en 0,
- al desplazarse $d\mathbf{r}_k$, las fuerzas producen trabajo

$$\text{lineal: } \underbrace{\sum_k \int_1^2 \mathbf{F}_k d\mathbf{r}_k}_{U_{12}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 dm}_{T_2^{\text{tras}}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 dm}_{T_1^{\text{tras}}} = \Delta T^{\text{tras}}$$

Energía cinética de rotación

$$T^{\text{rot}} = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 dm = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\omega \rho)^2 dm = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{B}} \rho^2 dm \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$



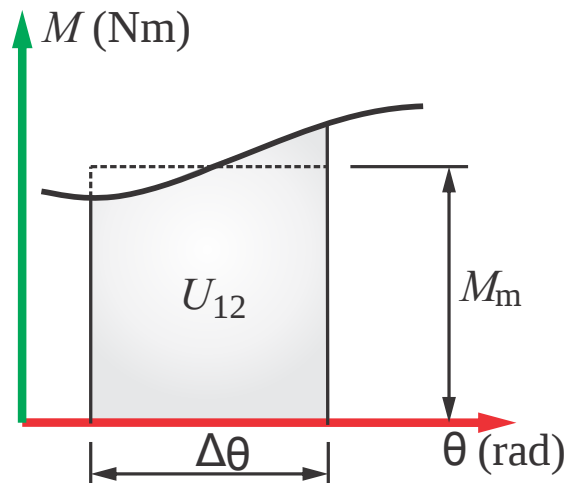
Para eje fijo, 1 GDL y $\omega = cte$, el trabajo de fuerzas exteriores, conservativas y no conservativas, es igual al cambio de energía cinética de rotación ΔT^{rot} :

$$\text{angular: } \underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_k (M_z)_k \underbrace{d\theta}_{\omega dt}}_{U_{12}^0} = \underbrace{\frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 \Big|_2}_{T_2^{\text{rot}}} - \underbrace{\frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 \Big|_1}_{T_1^{\text{rot}}} = \Delta T^{\text{rot}}$$

La energía cinética del cuerpo es aditiva $T_{\mathcal{B}} = T^{\text{tras}} + T^{\text{rot}}$.

Cálculo del trabajo:

- Momento constante: $U_{12} = \int M d\theta = M(\theta_2 - \theta_1) = M\Delta\theta$
- Momento variable: $U_{12} = \int M(\theta) d\theta \approx M_m \Delta\theta$



11.3 Potencia en la rotación

La potencia mide la rapidez con que el par M convierte trabajo en energía cinética (análogo a $P_{\text{tras}} = F v$)

$$P_{\text{rot}} = \frac{dU}{dt} = \frac{M_z d\theta}{dt} = M_z \omega_z$$

11.4 Conservación de la energía, eficiencia y disipación

Conservación de la energía mecánica en la rotación con eje fijo

- **Energía potencial gravitatoria:** $V_g = \int y \, dW = y_C W$ con y_C la altura del centro de gravedad del cuerpo respecto al eje. Si $y_C = 0$, luego $V_g = 0$.
- **Energía potencial elástica:** Involucra una rigidez torsional k_θ y se expresa como $V_e = \frac{1}{2} k_\theta (\Delta\theta)^2$.
- **Energía potencial total:** $V = V_g + V_e$ y $U_{12} = -(V_2 - V_1) = -\Delta V$.
- **Energía mecánica:** El trabajo de fuerzas conservativas y no conservativas es igual al cambio de energía cinética $U_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T$.

Si sólo existen fuerzas conservativas,

$$U_{12} = T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1) \rightarrow \underbrace{T_1 + V_1}_{E_1} = \underbrace{T_2 + V_2}_{E_2} = E_1 = E_2 = \text{cte}$$

la energía mecánica total se conserva.

11.4.1 Eficiencia y frenos dinamométricos

En la realidad siempre existen fuerzas no conservativas y la eficiencia es menor que 1:

$$\underbrace{T_1 + V_1}_{E_{\text{Entrada}}} > \underbrace{T_2 + V_2}_{E_{\text{Salida}}}$$

$$\eta = \frac{E_S}{E_E} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{P_S}{P_E} \quad 0 < \eta < 1$$

Con frenos dinamométricos se pueden obtener curvas de motores del tipo eléctrico. Con estos frenos se puede medir la potencia de salida (mecánica) y la de entrada (eléctrica).

$$\eta = \frac{P_S}{P_E} = \frac{M\omega}{W} = \frac{Fl\omega}{\sqrt{3}UI\cos\varphi}$$

En el laboratorio de la UTN FRC realizarán el experimento de medir el par motor, potencia y rendimiento de un motor asincrónico utilizando el freno de corrientes parásitas de Foucault mostrado en la Figura 11.1.

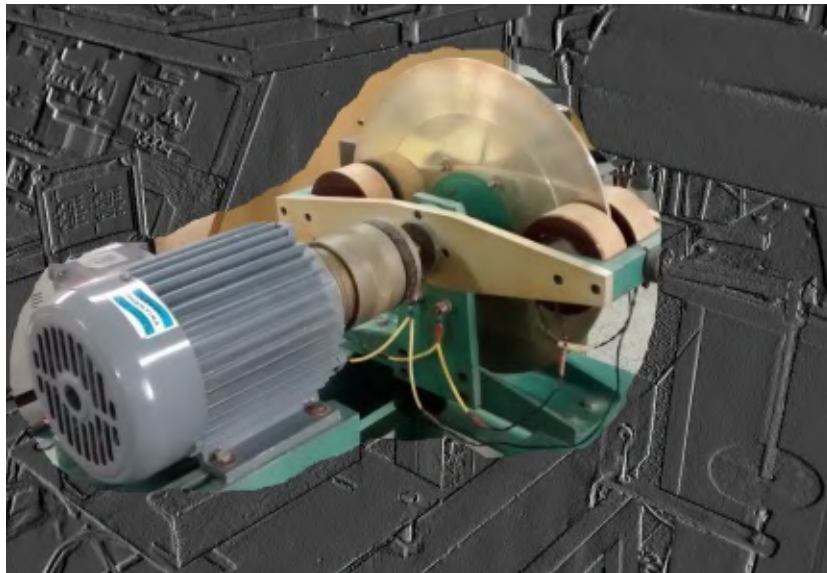


Figura 11.1: Freno de corrientes parásitas de Foucault.

Representación de vibraciones

Oscilaciones armónicas

Péndulo simple (solución aproximada).

Vibraciones torsionales

Vibración libre de traslación de un cuerpo con vínculo elástico

Rigidez equivalente

12. Oscilaciones mecánicas

Las oscilaciones mecánicas tienen un rol importante tanto en la generación de energía como en la transmisión. Las máquinas de ejes rotantes producen vibraciones que se transmiten a sus soportes y que deben controlarse mediante un cuidadoso programa de mantenimiento predictivo como el que se aplica en las turbinas de gas y vapor de los grupos turbo generadores. Las vibraciones disipan la energía cinética de masas móviles o desbalanceadas en otras formas de energía como ruido y calor por lo que deben controlarse por medios pasivos o activos. Las líneas de transmisión pueden sufrir diversos daños incluso su destrucción debido a vibraciones. En este caso, son las cargas externas variables las causantes de las vibraciones.



Figura 12.1: El puente de Tacoma se destruyó por vibraciones autoexcitadas inducidas por fuertes vientos.

El evento de destrucción del puente de Tacoma Narrows en USA (ver Figura 12.1) dio lugar a profundos estudios sobre los efectos del viento alrededor de diversas geometrías, entre ellas, cables. Von Kármán determinó que los vórtices del viento desprendidos en la estela detrás de los cables inducían fuerzas alternativas en los mismos, siendo uno de los avances más importantes en el estudio de las vibraciones inducidas por vórtices. Se pueden ver más videos en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Puente_de_Tacoma_Narrows

https://www.youtube.com/watch?v=1XyG68_caV4 (1940 completo)

<https://youtu.be/-ZB3VIghxyg> (2002-2007 | Reconstruido más nuevo puente en paralelo)

En investigaciones recientes, los enfoques modernos tienden a cosechar las vibraciones para generar energía y evitar su disipación, o bien, producirlas mediante interacción viento-estructura para generar energía. La cosecha de energía de las mareas también corresponden a movimientos oscilatorios. Por otro lado, en la generación eólica off-shore mediante plataformas flotantes ancladas se pretende disminuir los efectos de las olas sobre las plataformas.

El alcance de este estudio sobre oscilaciones mecánicas abarca:

1. Representaciones

2. Vibraciones libres, amortiguadas y forzadas
3. Resonancia, transmisibilidad y control de vibraciones
4. Vibraciones autoexcitadas en tendidos eléctricos

12.1 Representación de vibraciones

Para modelar matemáticamente a las oscilaciones, se emplean representaciones trigonométricas, vectoriales y complejas en el dominio del tiempo. (También existen representaciones en el dominio de la frecuencia que permite manipular y analizar a las ecuaciones diferenciales como expresiones polinómicas.)

Una **oscilación mecánica** es el movimiento alternativo de un cuerpo que se acerca y se aleja de una posición fija de referencia o de **equilibrio estable**.

Una **vibración mecánica** es un tipo de oscilación de un cuerpo en el que intervienen componentes elásticos o la elasticidad misma del cuerpo (p.ej. membrana de un tambor o instrumento musical) o un campo externo (gravedad) como fuerzas recuperadoras.

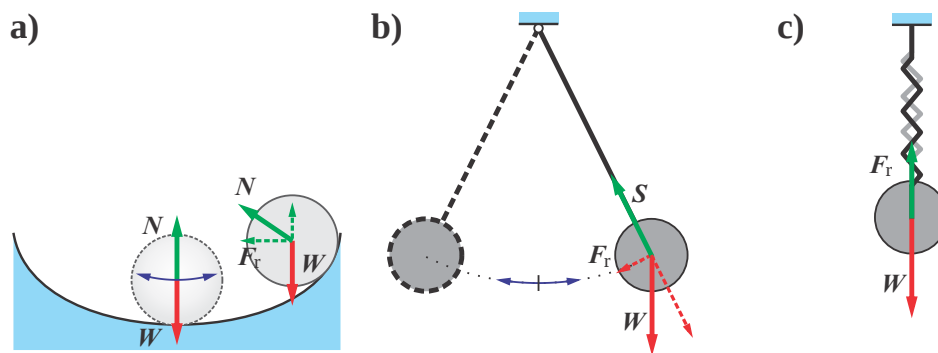


Figura 12.2: Ejemplos de cuerpos oscilando alrededor de un punto de equilibrio y fuerzas recuperadoras

Podemos citar otros tipos de equilibrios que no son estables como las que se muestran en la Figura 12.3

- **Equilibrio indiferente:** una perturbación de su posición lo mantiene en igual estado de energía.
- **Equilibrio inestable:** una perturbación de su posición hace que su energía se reduzca irreversiblemente.

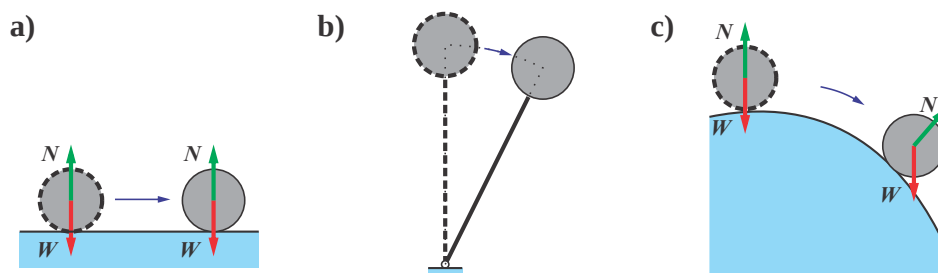


Figura 12.3: Ejemplos de equilibrio indiferente e inestable

No debe confundirse con

- **Equilibrio inestable controlado:** El ángulo de desequilibrio es la variable de conducción del avance del transportador personal de dos ruedas como los del tipo Segway (vertical o de silla de ruedas; ver Figura 12.4) o de las patinetas autobalanceadas de dos ruedas. La causa de su furor repentino y luego su desaliento en las ventas es que la fuerza de autobalanceo se reduce conforme se consume la energía de las batería y la persona puede caerse si no atiende la llegada a su límite; esto se ha solucionado con alarmas más seguras y con ruedas de descanso que se utilizan también en muchas sillas de ruedas de este tipo incluso para subir escaleras.



Figura 12.4: El desequilibrio puede ser una variable que se controla en forma activa

12.1.1 Oscilaciones armónicas

La oscilación en una dimensión se puede representar por la proyección de un movimiento circular, denominado oscilación armónica.

$$x(t) = r \sin(\theta) = r \sin(\omega t) = r \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = r \sin(2\pi f t)$$

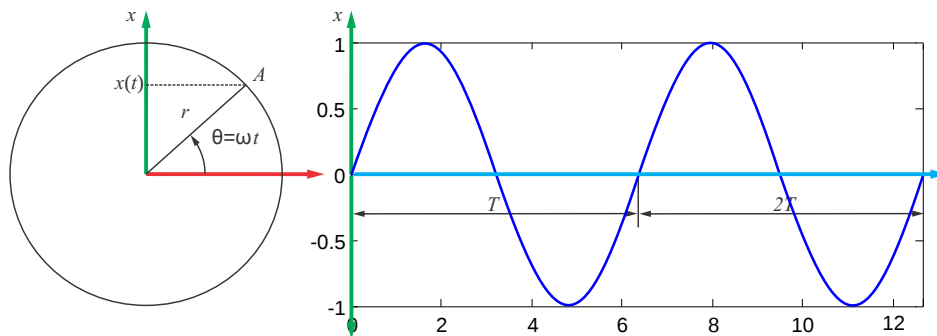


Figura 12.5: La oscilación unidimensional puede obtenerse por la proyección del extremo de un vector rotativo. En el caso de representarse en el plano complejo se lo denomina fasor.

Como se muestra en la Figura 12.5, el giro a velocidad constante del vector define simultáneamente tres parámetros característicos:

- El **periodo** es el tiempo T (s) en que la partícula A gira un ángulo de 2π .
- El vector r , de amplitud r gira con **frecuencia angular** ω .
- La función periódica $x(t) = x(t + nT)$ se repite para $n = 1, 2, 3, \dots$ con **frecuencia** $f = \frac{1}{T}$ (Hz).

Dos oscilaciones de igual periodo (o igual frecuencia angular, o igual frecuencia),

$$x_A(t) = A \sin(\omega t) \text{ y } x_B(t) = B \cos(\omega t),$$

se pueden componer en una única oscilación compuesta:

$$x_C(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \phi)$$

donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ es el módulo y $\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ es la fase.

Nótese en la Figura 12.6 que al rotar los vectores a igual frecuencia angular su posición relativa se mantiene constante, entonces su magnitud puede obtenerse como la magnitud de su suma vectorial y el ángulo de ϕ es el ángulo que adelanta el vector azul al rojo, es decir, se mide con el vector con función seno (*más atrasado*) como referencia.

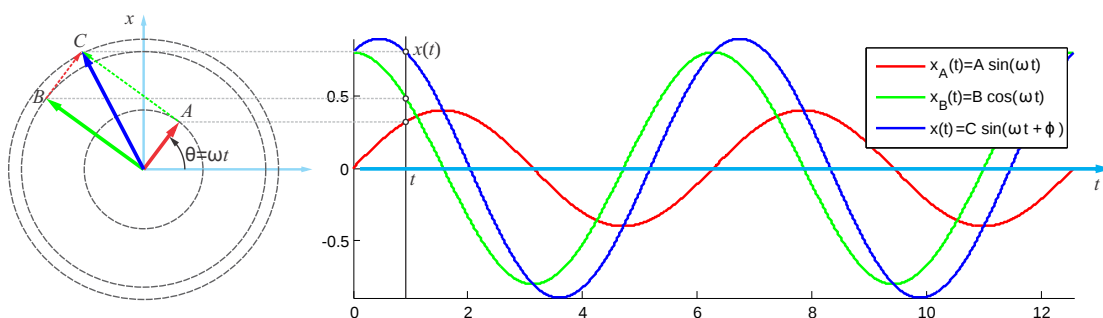


Figura 12.6: Composición de 2 oscilaciones

Sean ω , A y B coeficientes independientes del tiempo de dos funciones trigonométricas que definen la posición como

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ &= x_m \sin(\omega t + \phi) \quad x_m = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{B}{A}\right) \end{aligned}$$

Las derivadas de ambas oscilaciones en cada término equivalen a obtener la derivada de la oscilación compuesta; para algunos problemas conviene utilizar esta última

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) = \underbrace{x_m \omega}_{v_m} \cos(\omega t + \phi)$$

lo mismo se considera al derivar la velocidad para obtener la aceleración

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) = \underbrace{-x_m \omega^2}_{a_m} \sin(\omega t + \phi)$$

Esto se utiliza en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias que veremos más adelante, donde conviene proponer una función trigonométrica solución como la suma de una función seno y otra coseno con sus amplitudes como incógnitas (en vez usar su módulo y fase). Luego, con las condiciones que cumple la posición y su primera derivada al tiempo inicial, se tienen dos ecuaciones para determinar sus amplitudes

Condiciones iniciales: Para $t = 0$ se obtienen A y B ,

$$\begin{aligned} x(0) &= B = x_0 \longrightarrow \boxed{B = x_0} \\ v(0) &= A\omega = v_0 \longrightarrow \boxed{A = v_0/\omega} \end{aligned}$$

Finalmente, se define a su vector rotativo como su composición en términos de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \\ &= x_m \sin(\omega t + \phi) \quad x_m = \sqrt{(v_0/\omega)^2 + x_0^2} \quad \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{x_0}{v_0/\omega}\right) \end{aligned}$$

12.2 Péndulo simple (solución aproximada).

El péndulo simple presenta un equilibrio de carácter estable, la fuerza recuperadora es la componente del peso tangencial a la trayectoria; ver Figura 12.7. Por sus características se lo ha utilizado como reloj estándar por casi 270 años. Su funcionamiento es muy simple:

1. Se aparta al péndulo de su posición de equilibrio en θ_0 y se lo libera (actúa $W \sin \theta_0$; máxima energía potencial y energía cinética nula).
2. Al pasar por la posición de equilibrio, la componente tangencial del peso es nula pero su velocidad es máxima (máxima energía cinética y energía potencial nula).
3. Si se desprecian rozamientos, el péndulo llega a la posición $-\theta_0$ (y $v = 0$), luego retorna debido a la componente tangencial del peso; actúa $W \sin(-\theta_0)$.

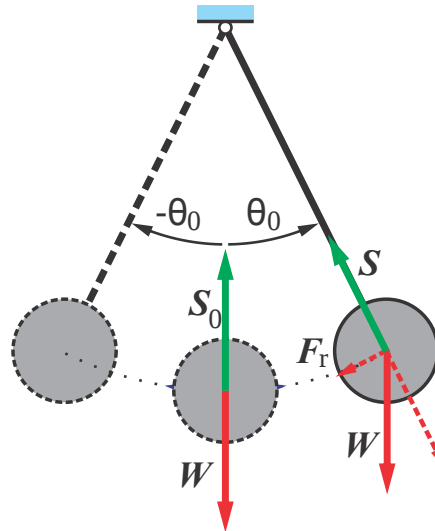


Figura 12.7: Péndulo simple con las fuerzas de tensión de la cuerda, fuerza peso y su componente de fuerza recuperadora

Para ciertas condiciones iniciales y geometría del péndulo, se requiere conocer el periodo y, por lo tanto, la frecuencia de la oscilación. Para el péndulo simple, veremos que su periodo sólo depende de su longitud.

Ecuación diferencial del péndulo simple

En la Figura 12.8 se muestra el diagrama de cuerpo libre (D.C.L.) en su posición de partida (que idealmente repite en cada periodo). Consideremos en este D.C.L. del péndulo una dirección tangencial

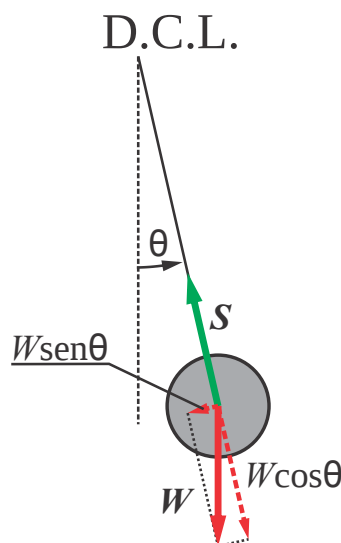


Figura 12.8: Diagrama de cuerpo libre del péndulo

al movimiento y una dirección normal que se alinea con la cuerda. Planteando primero la 2da ley de

Newton en coordenadas naturales en la dirección normal se obtiene

$$\sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{L} \quad \text{utilizando: } v = r\omega = L \frac{d\theta}{dt}$$

$$S - W \cos \theta = mL \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

entonces la reacción de la cuerda será del tipo dinámica, cambiando según

$$S = W \cos \theta + mL \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Planteando luego la 2da ley de Newton en coordenadas naturales en la dirección tangencial se obtiene

$$\begin{aligned} \sum F_t &= ma_t \\ -W \sin \theta &= m \frac{dv}{dt} \quad \text{utilizando: } v = L \frac{d\theta}{dt} \\ -W \sin \theta &= mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ -mg \sin \theta &= mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Esta última se puede expresar en forma homogénea como

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{p^2} \sin \theta = 0} \quad (12.1)$$

donde se ha incluido el parámetro

$$p = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

que tiene el significado de la frecuencia angular del péndulo.

La ecuación diferencial (12.1) no es lineal debido al término con $\sin \theta$ y debe resolverse mediante integrales elípticas. Veremos una solución aproximada que produce errores pequeños para pequeñas oscilaciones, cuando θ es pequeño. Considerando $\sin \theta \approx \theta$ ($\tan \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$) la solución aproximada de (12.1) se obtiene de la ecuación diferencial modificada como

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2 \underbrace{\sin \theta}_{\approx \theta} = 0} \approx \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2 \theta = 0}$$

es decir, la aceleración angular $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ es debida a una fuerza restauradora de dirección opuesta y proporcional al desplazamiento angular $-\text{cte}\theta$.

La ecuación diferencial (aproximada) corresponde al problema

Hallar $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = F(t) \quad \text{s.a. C.I.} \quad (12.2)$$

es lineal de segundo orden, es homogénea ($F(t) = 0$), a coeficientes constantes ($a_2 = p^2 = \text{cte}$) e incompleta ($a_1 = 0$).

La solución de la ecuación diferencial homogénea (12.2) se obtiene con métodos de cálculo, proponiendo una solución general que será suma de funciones periódicas de frecuencia p con coeficientes a determinar con las C.I.

1. **Soluciones particulares:** $\theta_1 = \sin(pt)$ y $\theta_2 = \cos(pt)$

2. **Forma de la solución general de la homogénea:** Combinación lineal de las particulares,

$$\theta(t) = A\theta_1 + B\theta_2 = A\sin(pt) + B\cos(pt) \quad (12.3)$$

3. **Condiciones iniciales:** Evaluadas en la forma general para $t = 0$, con θ_0 y $\dot{\theta}_0 = \omega_0 = v_0/L$ para determinar A y B .

$$\begin{aligned} \blacksquare \theta(0) &= A \cdot 0 + B \cdot 1 = \theta_0 \rightarrow B = \theta_0 \\ \blacksquare \dot{\theta}(0) &= pA \cdot 1 - pB \cdot 0 = \dot{\theta}_0 \rightarrow A = \frac{\dot{\theta}_0}{p} \end{aligned}$$

4. **Solución general de la homogénea:** Reemplazando A y B en (12.3)

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{p} \sin(pt) + \theta_0 \cos(pt)$$

Que se puede componer en una única función armónica de frecuencia p

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\dot{\theta}_0}{p} \sin(pt) + \theta_0 \cos(pt) \quad \text{con} \quad p = \sqrt{\frac{g}{L}} \\ &= \theta_m \sin(pt + \phi); \quad \theta_m = \sqrt{(\dot{\theta}_0/p)^2 + (\theta_0)^2}; \quad \phi = \text{atan}\left(\theta_0 \frac{p}{\dot{\theta}_0}\right) \end{aligned}$$

Los parámetros del péndulo son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{Frecuencia angular natural o propia:} \quad p &= \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_n \\ \blacksquare \text{Periodo natural: } pT &= 2\pi \quad \therefore T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ \blacksquare \text{Frecuencia cíclica natural:} \quad f &= \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \end{aligned}$$

La solución exacta se calcula con integrales elípticas, la aproximada tiene un 0,2 % de error en T si el ángulo máximo es de 10° . El reloj construido como un péndulo simple no aseguraba el *isocronismo* por lo que fue dotado de innumerables mejoras mediante mecanismos, reguladores, compensadores por variación de temperaturas, etc. Perdió auge con la llegada del reloj de cuarzo en 1930.

12.3 Vibraciones torsionales

Otra aplicación del péndulo simple y su solución aproximada es la de medir la inercia rotacional de cuerpos, dando lugar al péndulo torsional que también se utilizó como reloj. La oscilación torsional tiene una ecuación diferencial análoga a la del péndulo con pequeñas oscilaciones. Aplicando la 2da Ley de Newton para la rotación se obtiene

$$\begin{aligned} \sum M &= I_{zz} \alpha = I_{zz} \dot{\omega} = I_{zz} \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ -K_T \theta &= I_{zz} \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

que llevada a su forma homogénea queda idéntica a la del péndulo simple a diferencia de su frecuencia

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2\theta = 0 \quad p = \sqrt{\frac{K_T}{I_{zz}}}$$

La solución se obtiene con procedimiento ya visto para el péndulo simple.

La frecuencia natural $p = \omega_n$ depende de:

- **Momento de inercia del cuerpo rotante:** I_{zz} .

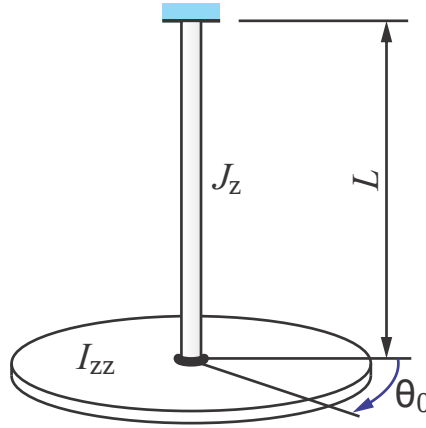


Figura 12.9: Péndulo torsional compuesto de un disco y una varilla biempotrada

■ **Rigidez elástica de torsión:** K_T

Para el ejemplo de una barra de torsión biempotrada, la deflexión angular es $\theta = \frac{ML}{GJ_z}$ donde la rigidez es $K_T = \frac{GJ_z}{L}$, donde G es el módulo de elasticidad transversal del material y J_z es el momento de inercia polar de la barra. Si la barra es cilíndrica, éste se calcula como $J_z = \frac{\pi d^4}{32}$. Entonces, el periodo se calcula como

$$T_o = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{zz}}{K_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{32LI_{zz}}{G\pi d^4}} \quad (12.4)$$

Como elemento de medición de momentos de inercia, se deben conocer los parámetros de rigidez de la barra de torsión K_T . El cuerpo a medir se lo adosa firmemente al disco y se lo hace oscilar midiendo el período de oscilación T . Con ello se obtiene p y luego se calcula fácilmente el momento de inercia del conjunto $I_{zz} = K_T / p^2$. El momento de inercia del cuerpo a medir se obtiene restando al valor obtenido el momento de inercia del disco. Esto sirve para validar experimentalmente a momentos de inercia calculados en sistemas de diseño asistidos por computadora (CAD).

12.4 Vibración libre de traslación de un cuerpo con vínculo elástico

Las vibraciones de traslación de cuerpos con vínculos elásticos se clasifican en los siguientes casos:

- **Vibración libre:** El movimiento se debe únicamente a fuerzas de recuperación.
- **Vibración forzada:** Cuando al sistema se aplica una fuerza periódica.
- **Vibración no amortiguada:** Cuando se pueden despreciar los efectos de rozamiento.
- **Vibración amortiguada:** En cierto grado, todas las vibraciones son amortiguadas y existe algún efecto de rozamiento antagonista al movimiento.

Vibración libre

Las vibraciones libres se deben a fuerzas recuperadoras y se originan porque se perturba a un cuerpo respecto de su posición de equilibrio. El parámetro importante a hallar es la frecuencia de la vibración libre. Inicialmente, el cuerpo se encuentra en equilibrio estático. La perturbación a aplicar a tiempo inicial $t = 0$ es:

1. un desplazamiento inicial $x(0) = x_0$,
2. una velocidad inicial $v(0) = v_0$,
3. ó ambos $x(0) = x_0 \wedge v(0) = v_0$.

Se debe analizar si la fuerza gravitatoria compensa a la fuerza elástica

En el caso de la Figura 12.10(a), el cuerpo se encuentra en equilibrio estático ($x = 0$) cuando la fuerza peso equilibra la fuerza restauradora del resorte para la deflexión estática δ_e :

$$-k\delta_e + mg = 0$$

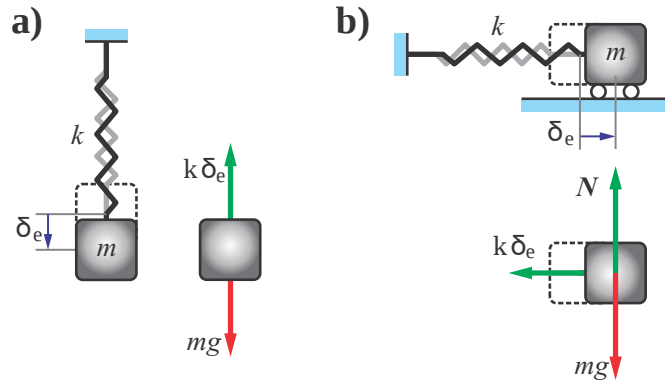


Figura 12.10: Oscilación libre con influencia de la gravedad (a) y sin influencia de la gravedad (b)

A partir de ese equilibrio inicial se estudiará el movimiento luego de aplicar las C.I.s como se muestra en la Figura 12.11

$$(+x \downarrow) \quad -k(\delta_e + x) + mg = m\ddot{x}$$

en donde $-k\delta_e$ se cancela con mg y el movimiento no dependerá de la gravedad

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

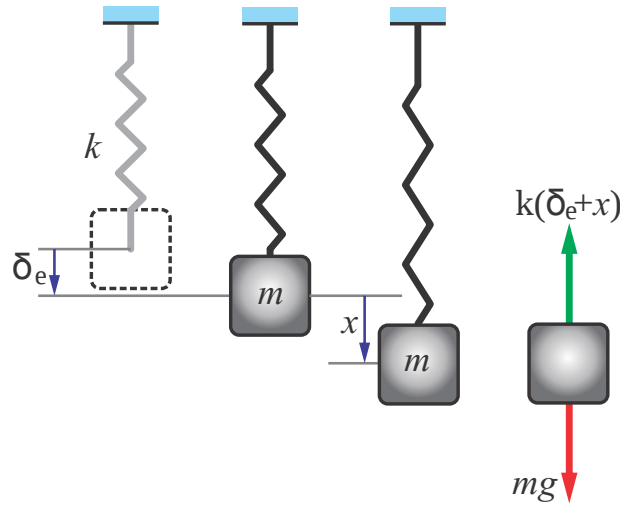


Figura 12.11: Oscilaciones de traslación vertical

que se lleva a la forma

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = 0 \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (12.5)$$

donde la frecuencia natural depende de la masa m y la rigidez del resorte k . En términos de las condiciones iniciales, la solución (con procedimiento idéntico que para el péndulo simple) se expresa como

$$x(t) = A \sin(pt) + B \cos(pt) \Big|_{C.I.} = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin(pt) + x_0 \cos(pt) = x_m \sin(pt + \phi);$$

$$x_m = \sqrt{(\dot{x}_0/p)^2 + (x_0)^2}; \quad \phi = \text{atan}\left(x_0 \frac{p}{\dot{x}_0}\right)$$

Entonces la masa m y la rigidez del resorte k determinan el comportamiento oscilatorio mediante los parámetros

■ **Frecuencia angular natural o propia:** $p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$

■ **Periodo natural:** $pT = 2\pi \quad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

■ **Frecuencia cíclica natural:** $f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$

y con ellos la cinemática se puede determinar como

$$x(t) = x_m \sin(pt + \phi)$$

$$v(t) = \underbrace{x_m p}_{v_m} \cos(pt + \phi) = v_m \cos(pt + \phi)$$

$$a(t) = -\underbrace{x_m p^2}_{a_m} \sin(pt + \phi) = -a_m \sin(pt + \phi)$$

La Figura 12.12 muestra las influencias de las condiciones iniciales para una vibración libre con frecuencia angular fija, es decir, con $m = 1$ y $k = 100$ fijos, resultando en $p = \sqrt{100}$.

- Cuando se impone un desplazamiento inicial únicamente, $x_0 = 0,01$, la solución sigue claramente una ley coseno con valor inicial 0,01 y tangente horizontal

$$x(t) = x_0 \cos(pt) = 0,01 \cos(\sqrt{100}t)$$

- Cuando se impone una velocidad inicial únicamente, $v_0 = 0,1$, la solución sigue claramente una ley seno con valor inicial 0 y tangente 0,1, de modo que la solución es

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin(pt) = \frac{0,1}{\sqrt{100}} \sin(\sqrt{100}t)$$

- Cuando se impone ambas condiciones iniciales, la solución parte a tiempo inicial de 0,01 con tangente 0,1, la composición resultante es la ley

$$x(t) = \frac{0,1}{\sqrt{100}} \sin(\sqrt{100}t) + 0,01 \cos(\sqrt{100}t)$$

12.4.1 Rigidez equivalente

Los sistemas de cuerpos rígidos vinculados por resortes se pueden reducir del mismo modo que se opera con circuitos eléctricos. Básicamente se debe reconocer la configuración de la conexión, si es paralelo o serie. Hallar la rigidez equivalente consiste en hallar una rigidez única k de un resorte equivalente para luego calcular su cinemática y dinámica.

Como muestra la Figura 12.13, los **resortes en paralelo** están solicitados a la misma deformación δ .

La fuerza F requerida para producir δ es contrarrestada por las fuerzas individuales de los resortes:

$$F = F_1 + F_2 = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

La rigidez equivalente es

$$k = \frac{F}{\delta} = k_1 + k_2$$

o bien, para n resortes en paralelo es

$$k = \sum_{i=1}^n k_i$$

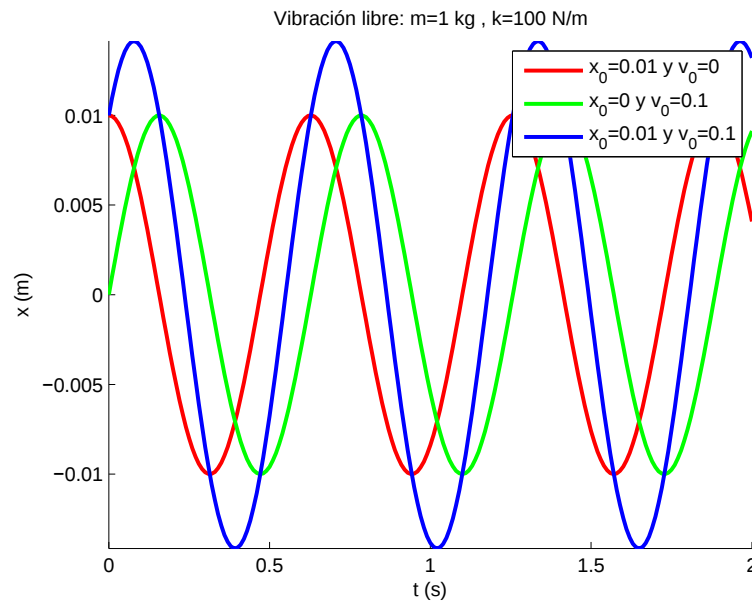


Figura 12.12: Influencia de las condiciones iniciales para frecuencia angular fija.

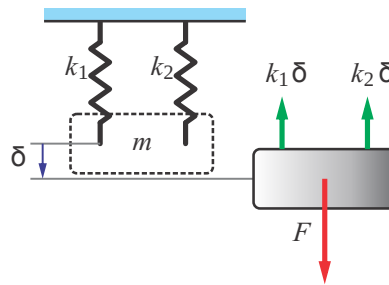


Figura 12.13: Resortes en paralelo y diagrama de cuerpo libre

Como muestra la Figura 12.14, los **resortes en serie** están sometidos a la misma carga estática F . La deformación δ es la suma de las deformaciones individuales:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F = \frac{1}{k} F$$

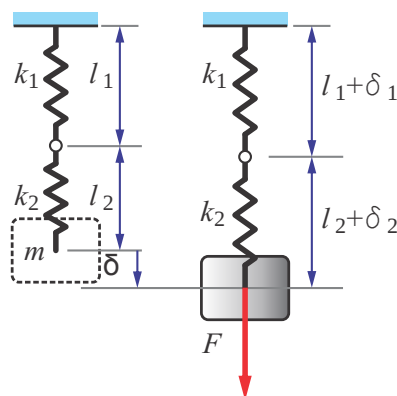


Figura 12.14: Resortes en serie en dos configuraciones

La rigidez equivalente es

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

o bien, para n resortes en serie es

$$\boxed{\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

Es decir, el recíproco de la rigidez equivalente, es igual a la suma de los recíprocos de las rigideces de los resortes en serie.

En la sección de analogía eléctrica veremos que desplazamiento y velocidad son análogas en las ecuaciones diferenciales de gobierno, a la carga y la corriente eléctrica respectivamente. Con ello, los elementos constitutivos como las rigideces de los resortes serían análogos a los recíprocos de las capacitancias de los capacitores.

Vibración libre con amortiguación viscosa

Categorías de movimiento amortiguado
Determinación experimental del coeficiente de resistencia

Vibración forzada

Vibración forzada por fuerza excitadora
Vibración forzada por desplazamiento excitador

Solución de la ecuación diferencial ordinaria

Vibración forzada: Solución de la no amortiguada
Vibración por desbalanceo de un rotor no amortiguado
Vibración forzada con amortiguación viscosa

Fuerzas transmitidas, control y aislamiento de vibraciones

Aislamiento de oscilaciones

Aislamiento de oscilaciones en fundación de máquinas e instrumentos eléctricos

Oscilaciones eólicas en líneas de transmisión eléctrica.

Absorbedores dinámicos

Recolectores de energía del movimiento

13. Vibraciones amortiguadas

En los sistemas oscilantes reales siempre existe alguna disipación. Eliminar la disipación en el reloj de péndulo fue un gran desafío tendiente a lograr un reloj ideal. En muchos casos se puede lograr una minimización de las disipaciones. En otros casos, se debe lograr una disipación de energía especificada para amortiguar una vibración. Repasaremos los fundamentos de las vibraciones libres amortiguadas, es decir aquellas en que no hay fuerzas externas; las analizamos sometidas a condiciones iniciales que sólo participan al tiempo inicial. Luego, analizaremos el caso de vibración forzada y con desplazamiento en la base. Analizaremos los conceptos de factor de amplificación, factor de transmisibilidad, fase y resonancia. También cómo distinguir las fases de trabajo para el control de vibraciones. Finalmente, veremos un caso de vibraciones autoexcitadas en tendidos eléctricos y su mitigación con absorbedores dinámicos.

13.1 Vibración libre con amortiguación viscosa

Todo sistema mecánico posee un grado de fricción que disipa energía. Las **fuerzas no conservativas o disipadoras** de origen mecánico producen un amortiguamiento debido a:

- Fricción entre sólidos.
- Rozamiento entre sólidos y fluidos (líquidos ó gases).

Para simplificar el estudio consideramos una masa en traslación sometida a dos tipos de fuerzas:

$P_a = -b\dot{x}$ fuerza de amortiguamiento proporcional y opuesta a la velocidad

$P_e = -kx$ fuerza elástica proporcional y opuesta al desplazamiento.

Planteando la 2da Ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial del movimiento para el diagrama de cuerpo libre en la posición de equilibrio entre el peso W y fuerza de resorte $-k\delta_e$ producida por la deflexión estática δ_e . En movimiento (luego de aplicar C.I.s)

$$\begin{aligned} (+x \downarrow) \quad \sum F &= P_a + P_e + W = ma \\ -k(x + \delta_e) - b\dot{x} + mg &= m\ddot{x} \quad (k\delta_e = mg) \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

y dividiendo por m se obtiene

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2n} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{p^2} x = 0$$

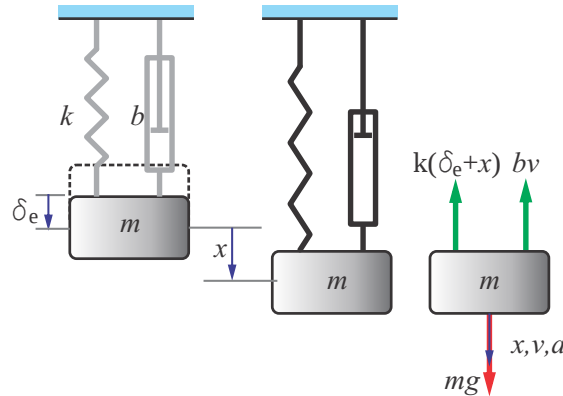


Figura 13.1: Fuerzas elásticas y de amortiguamiento sobre un cuerpo rígido en traslación

En comparación con las vibraciones libres, la definición de la frecuencia angular es la misma, pero aquí aparece el término de la velocidad multiplicado por la constante $2n$, donde se definió $n = \frac{b}{2m}$, obteniéndose

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + p^2 x = 0 \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m}$$

El **coeficiente de amortiguación viscosa** n que tiene unidades de $1/s$ también se lo relaciona con p a través del factor (adimensional) ζ de amortiguamiento viscoso como $n = \frac{b}{2m} = \zeta p$, o bien

$$\zeta = \frac{b}{2mp} = \frac{n}{p}$$

La ecuación diferencial obtenida es ordinaria (E.D.O.), de segundo orden, lineal, con coeficientes constantes, completa y homogénea

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0 \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m}$$

Solución: Se asume una solución de la forma $x(t) = Ce^{\lambda t}$, que derivada resulta en $\dot{x} = C\lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$, y sustituida en la E.D. permite hallar la *ecuación característica* (E.C.)

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2nC\lambda e^{\lambda t} + p^2 C e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{divido } C e^{\lambda t})$$

$$\lambda^2 + 2n\lambda + p^2 = 0$$

con raíces $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}$

Las raíces

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2} \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2}$$

dan lugar a dos soluciones particulares

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}$$

Por el *Principio de Superposición* de los sistemas lineales la solución general es combinación lineal de las soluciones individuales correspondientes a cada raíz de la E.C., donde las constantes A y B se determinan aplicando las C.I., por ejemplo:

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

$$= A e^{(-n + \sqrt{n^2 - p^2})t} + B e^{(-n - \sqrt{n^2 - p^2})t}$$

$$= A e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + B e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (\text{usando } \zeta)$$

En la solución de la ecuación diferencial se puede usar tanto n y p o bien, sólo a ζ .

13.1.1 Categorías de movimiento amortiguado

Con los parámetros m , k y b , el discriminante $\sqrt{n^2 - p^2}$ de λ puede ser cero, positivo o negativo, dando lugar a raíces (I) reales iguales y negativas, (II) reales distintas y negativas, o (III) complejas.

El coeficiente de resistencia crítico $b_c = f(m, k)$ es el que corresponde a $n = p$ o bien a $\zeta = 1$ y se calcula en función de la rigidez k y la masa m como

$$n_c = \frac{b_c}{2m} = p \rightarrow b_c = 2mp = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

Entonces, dados m, k, b el sistema puede tener $b > b_c$, $b = b_c$ o $b < b_c$.

Caso I) Críticamente amortiguado, $b = b_c$, $\zeta = 1$

Con $n = p$ el discriminante se anula y las raíces son reales, iguales y negativas $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -p = -\omega_n$ con soluciones particulares $x_1 = x_2 = e^{-pt}$. Al haber multiplicidad, se agrega t multiplicando a la primera solución

La solución general es

$$x(t) = A t x_1 + B x_2 = \underbrace{e^{-pt}}_{\text{f.exp.}} \underbrace{(At + B)}_{\text{f.lineal}}$$

que sujeta a las C.I.s permite obtener

$$x(0) = \underbrace{e^{-p \cdot 0}}_1 (A \cdot 0 + B) = x_0 \rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x}(0) = e^{-p \cdot 0} A - p e^{-p \cdot 0} (A \cdot 0 + B) = A - pB = v_0 \rightarrow A = v_0 + px_0$$

Luego, la solución es una función exponencial en t multiplicada por una función lineal en t :

$$x(t) = \underbrace{e^{-pt}}_{\text{f.exp.}} \underbrace{((v_0 + px_0)t + x_0)}_{\text{f.lineal}}$$

En esta solución **no hay oscilación** y el desplazamiento se reduce debido al exponente negativo de la función exponencial. Se la muestra en color verde en la gráfica de la Figura 13.2. La respuesta se reconoce como la que tiene el transitorio de menor tiempo, llega a cero más rápido que para otros amortiguamientos. El crítico es la transición entre el movimiento oscilante y el no oscilante. Veremos a continuación otro caso no oscilante.

Caso II) Amortiguamiento super-crítico (fuerte o sobreamortiguado) $b > b_c$, $\zeta > 1$

En $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}$, el discriminante es positivo si $n > p$ y las raíces serán reales, distintas y negativas $\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2}$ y $\lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2}$ con soluciones particulares $x_1 = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2 = e^{\lambda_2 t}$.

La solución general es $x(t) = Ax_1 + Bx_2 = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, sujeta a las C.I.s

$$x(0) = Ae^{\lambda_1 \cdot 0} + Be^{\lambda_2 \cdot 0} = A + B = x_0 \rightarrow A = x_0 - B \rightarrow A = \frac{x_0 \lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= \lambda_1 A e^{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 \cdot 0} = v_0 \\ &= \lambda_1 (x_0 - B) e^{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 \cdot 0} = v_0 \rightarrow B = \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

La solución general adquiere la forma

$$x(t) = \left(\frac{x_0 \lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{\lambda_2 t}$$

en donde **no hay oscilación**, a $t = 0$ el desplazamiento vale $A + B = x_0$ y posee pendiente v_0 luego se reduce debido al exponente negativo de las funciones exponenciales. Un ejemplo se muestra en la gráfica color verde de la Figura 13.2.

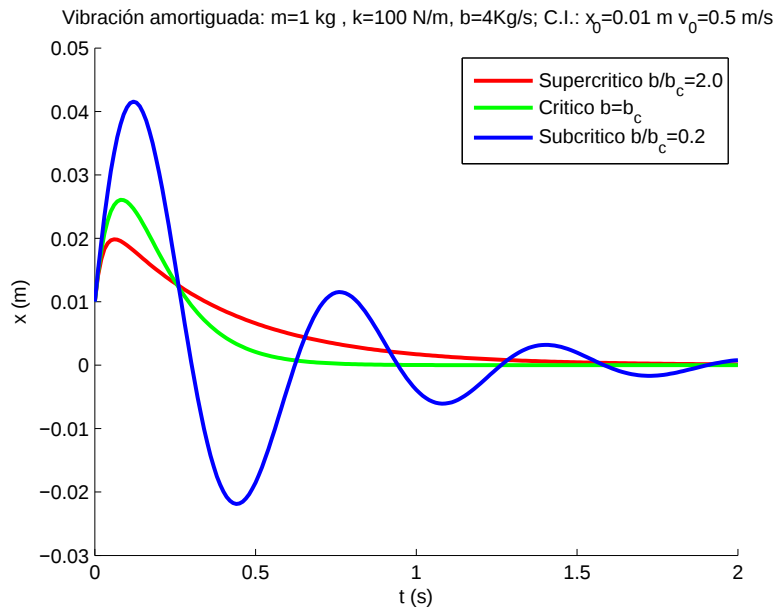


Figura 13.2: Ejemplos de respuesta de sistema masa resorte amortiguador con diversos valores de amortiguamiento y las mismas condiciones iniciales.

Caso III) Amortiguamiento sub-crítico (débil o subamortiguado) $b < b_c$, $\zeta < 1$

En $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}$, el discriminante es negativo si $n < p$ y las raíces serán complejas de la forma $\lambda_{1,2} = -n \pm jq$ con $q = \sqrt{p^2 - n^2}$ y j la unidad imaginaria. Tienen soluciones particulares $x_1 = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2 = e^{\lambda_2 t}$.

La solución general es $x(t) = Ax_1 + Bx_2 = Ae^{(-n+jq)t} + Be^{(-n-jq)t}$, que se puede escribir como el producto de una función temporal con parámetro n y otra con parámetro q

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Ae^{-nt} e^{jq t} + Be^{-nt} e^{-jq t} \\
 &= e^{-nt} (Ae^{jq t} + Be^{-jq t}); \quad \text{Euler } e^{\pm jz} = \cos(z) \pm j\sin(z) \quad \text{con } z = qt \\
 &= e^{-nt} \{A[\cos(qt) + j\sin(qt)] + B[\cos(qt) - j\sin(qt)]\} \\
 &= e^{-nt} ((jA - jB)\sin(qt) + (A + B)\cos(qt)) \\
 &= e^{-nt} (A'\sin(qt) + B'\cos(qt))
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-nt}}_{\text{f.exp}} \underbrace{(A'\sin(qt) + B'\cos(qt))}_{\text{f.armónica}} = x'_m e^{-nt} \sin(qt + \phi')$$

Donde se define:

- Amplitud inicial: $x'_m = \sqrt{A'^2 + B'^2}$
- Frecuencia angular de la vibración amortiguada: $q = \sqrt{p^2 - n^2} < p$
- Ángulo de fase: $\phi' = \arctan\left(\frac{B'}{A'}\right)$
- Periodo amortiguado: $T' = \frac{2\pi}{q} > \frac{2\pi}{p} = T$
- Frecuencia amortiguada: $f' = \frac{1}{T'} < \frac{1}{T} = f$

Aplicando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 x(0) &= e^{-n0} (A'\sin(q0) + B'\cos(q0)) = x_0 \longrightarrow B' = x_0 \\
 \dot{x}(0) &= (-n)e^{-n0} (A'\sin(q0) + B'\cos(q0)) + e^{-n0} (qA'\cos(q0) - qB'\sin(q0)) \\
 &= -nB' + qA' = v_0 \longrightarrow A' = \frac{v_0 + nB'}{q} \longrightarrow A' = \frac{nx_0 + v_0}{q}
 \end{aligned}$$

Su respuesta es una **oscilación limitada por la exponencial**, a $t = 0$ el desplazamiento vale x'_m y luego se reduce, su vector asociado describe una espiral logarítmica. Un ejemplo se muestra en la gráfica color azul de la Figura 13.2.

13.1.2 Determinación experimental del coeficiente de resistencia

Sobre la respuesta de un desplazamiento oscilante, como el mostrado en la gráfica color azul de la Figura 13.2, se miden las amplitudes máximas en dos tiempos separados por N periodos T' , $x_1 = x_m e^{-n t_1}$ y $x_2 = x_m e^{-n t_2} = x_m e^{-n(t_1 + NT')} = x_m e^{-n t_1} e^{-n NT'}$ que mantienen una relación constante

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_m e^{-n t_1}}{x_m e^{-n t_1} e^{-n NT'}} = \frac{1}{e^{-n NT'}} = e^{n NT'}$$

tomando logaritmos m.a.m. y reemplazando a T' como función de q y luego poniéndola en función de p y n se obtiene

$$\delta_N = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = n N T' = n N \frac{2\pi}{q} = n N \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}}$$

se despeja $n = \frac{p \delta_N}{\sqrt{\delta_N^2 + (2\pi N)^2}}$ e iguala a $b/2m$ para obtener finalmente el coeficiente de amortiguamiento

$$b = \frac{2mp\delta_N}{\sqrt{\delta_N^2 + (2\pi N)^2}} \quad \text{con} \quad \delta_N = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

El *decremento logarítmico* se define como el logaritmo del cociente de dos mediciones sucesivas ($N = 1$).

13.2 Vibración forzada

Analizaremos el caso vibraciones armónicas forzadas por funciones armónicas. En particular, los casos forzados por fuerza excitadora y por desplazamiento excitador, ambos armónicos.

13.2.1 Vibración forzada por fuerza excitadora

Tomando como origen de desplazamiento a la posición de equilibrio debida a la deflexión estática, mostrada en la Figura 13.3(izq.)

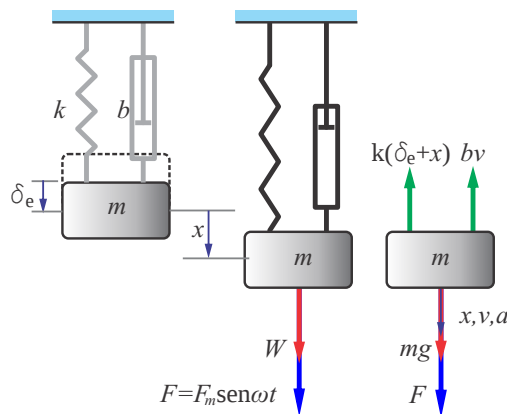


Figura 13.3: Oscilación forzada por fuerza excitadora

se plantea sobre el D.C.L. la 2da Ley de Newton, incorporando la fuerza externa excitadora $F_m \sin(\omega t)$

$$\begin{aligned}
 (+x \downarrow) \quad \sum F &= P_e + P_a + W + F = ma \quad (W = mg = k\delta_e) \\
 -k(x + \delta_e) - b\dot{x} + mg + F_m \sin(\omega t) &= m\ddot{x} \\
 m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F_m \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

y dividiendo por m se obtiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + p^2 x = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m} \quad (13.1)$$

13.2.2 Vibración forzada por desplazamiento excitador

Para el caso de excitación en la base, la posición inicial estática es la misma (ver Figura 13.4), pero la fuerza excitadora proviene de un desplazamiento armónico que se aplica en la base $X(t) = X_m \sin(\omega t)$ e ingresa a la masa a través del resorte como la fuerza kX . Aplicando la 2da Ley de Newton

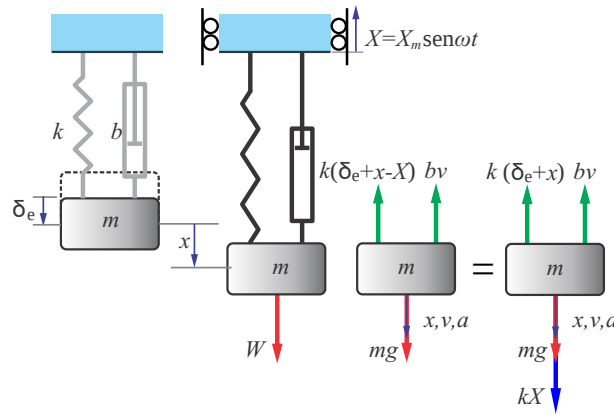


Figura 13.4: Oscilación forzada por excitación en la base

$$\begin{aligned}
 (+x \downarrow) \quad \sum F &= P_e(x, \delta_e, X) + P_a + W = ma \quad (W = mg = k\delta_e) \\
 -k(x + \delta_e - X) - b\dot{x} + mg &= m\ddot{x} \\
 m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= kX_m \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

y dividiendo por m se obtiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + p^2 x = \frac{kX_m}{m} \sin(\omega t) \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m} \quad (13.2)$$

13.3 Solución de la ecuación diferencial ordinaria

Note en azul la sutil diferencia entre las E.D.O. (13.1) y (13.2). Como consecuencia de ello, sólo desarrollaremos la solución para el primer caso ya que sus esquemas de resolución son idénticos. Como única diferencia, se identificará un factor de amplificación FA para el caso de fuerza excitadora y de un factor de transmisibilidad TD para el caso de desplazamiento excitador. Para la frecuencia angular natural o propia del sistema masa resorte, seguiremos utilizando p en vez de ω_n , para distinguirla bien de la frecuencia de la excitación ω .

La ecuación diferencial es ordinaria, lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, completa (incompleta si no hay amortiguamiento) y no homogénea.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + p^2 x = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \quad (13.3)$$

La solución general

$$x(t) = x_H + x_P$$

es la suma de la solución x_H de la homogénea (libre o amortiguada) y de una solución particular x_P de la forma y frecuencia de la excitación, es decir, $x_P = C \sin \omega t$.

- El movimiento es *superposición* de oscilaciones de distintas frecuencias, p y ω (veremos más adelante qué sucede si fuesen iguales).
- La vibración libre se presenta al inicio y se extingue debido al amortiguamiento en un tiempo denominado “transitorio”.
- La forzada seguirá actuando siempre y predomina en el “estacionario” o en “régimen” de trabajo. Primero analizamos qué sucede si no existiese amortiguamiento (físicamente irreal).

13.3.1 Vibración forzada: Solución de la no amortiguada

Quitando el amortiguamiento a (13.3), la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) es lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, *incompleta* y no homogénea.

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \quad (13.4)$$

Para la solución particular se propone $x_P = C \sin \omega t = x_m \sin \omega t$ con amplitud x_m a determinar al reemplazarla con $\ddot{x}$ en la E.D.O. incompleta (13.4):

$$\begin{aligned} -x_m \omega^2 \sin \omega t + x_m p^2 \sin \omega t &= \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \rightarrow -x_m \omega^2 + x_m p^2 = \frac{F_m}{m} \\ x_m &= \frac{1}{p^2 - \omega^2} \frac{F_m}{m} = \frac{1}{(1 - (\omega/p)^2)} \frac{F_m}{m p^2} = \underbrace{\frac{1}{(1 - (\omega/p)^2)}}_{F_A} \underbrace{\frac{F_m}{k}}_{x_E} \rightarrow \boxed{x_m = F_A x_E} \end{aligned}$$

Entonces, la solución particular es

$$x_P = F_A x_E \sin \omega t \quad (13.5)$$

donde

- F_A es el **Factor de Amplificación**, mide la severidad de la vibración.
 - x_E es la deformación estática si actuara F_m (sola, sin gravedad).
- El factor de amplificación F_A es el coeficiente que hay que multiplicar a la respuesta estática para obtener su efecto dinámico máximo.
- Identificamos relaciones importantes entre las frecuencias forzada y libre
- Periodo forzada $T^* = \frac{2\pi}{\omega} \neq \frac{2\pi}{p} = T$ y frecuencia forzada $f^* = \frac{1}{T^*} \neq \frac{1}{T} = f$.
 - Relación de frecuencias $\gamma = \omega/p$

Luego expresamos el F_A usando la relación de frecuencias

$$F_A = \frac{1}{(1 - \gamma^2)} \quad (13.6)$$

y lo graficamos en la Figura 13.5 como la curva de **respuesta dinámica frente a la excitación**. En la gráfica se destacan tres zonas

- **ZONA I:** $\omega < p$ desplazamiento en fase con la fuerza. $F_A \approx 1 \rightarrow x_m \approx x_E$ y casi no hay efecto dinámico de la excitación.
- **ZONA II:** $\omega \approx p \rightarrow \gamma \approx 1$ el sistema está en resonancia o en sintonía (desplazamiento en fase con la excitación si $\gamma < 1$ o en contrafase si $\gamma > 1$), F_A crece de manera pronunciada y por ende x tiende a infinito, los desplazamientos son grandes, las deformaciones de la suspensión pueden producir daños en el sistema.
- **ZONA III:** $\omega > p$ desplazamiento en oposición a la fuerza, fase 180° , γ tiende a infinito y el F_A tiende a anularse y x_m también, el cuerpo se aproxima al equilibrio estable o posee pequeñas amplitudes del movimiento forzado.

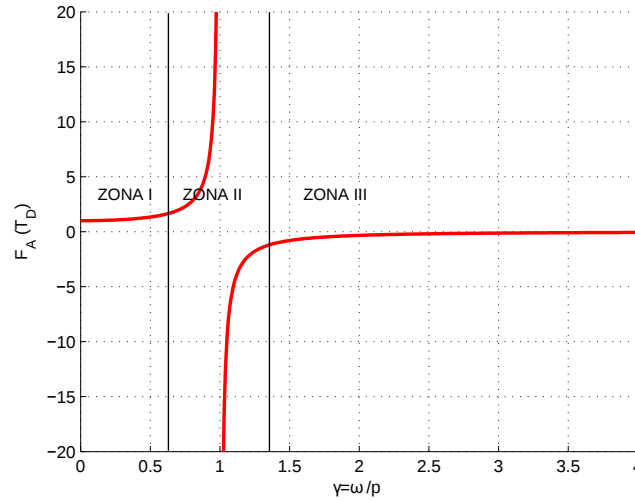


Figura 13.5: Curva de respuesta dinámica frente a la excitación

Para el caso de vibración forzada con excitación en la base y sin amortiguamiento, el desarrollo es similar y se obtiene que la amplitud máxima se define como el producto $x_m = T_D X_m$ de un **Factor de Transmisibilidad del Desplazamiento** y el desplazamiento máximo de la excitación X_m . Luego, la solución es

$$x_p = T_D X_m \sin \omega t \quad (13.7)$$

donde

$$T_D = \frac{1}{(1 - \gamma^2)} \quad (13.8)$$

El factor T_D es el valor que hay que multiplicar al desplazamiento excitador X_m para obtener el máximo x_m transmitido al cuerpo. La Figura 13.5 también corresponde al T_D , al igual que el análisis posterior de las zonas en que se divide.

13.3.2 Vibración por desbalanceo de un rotor no amortiguado

Para el caso particular de desbalanceo de un rotor, la amplitud de la excitación F_m no es constante y depende de la frecuencia de excitación ω cambiando la respuesta con respecto a los resultados anteriores. La fuerza de excitación es

$$F(t) = F_m(\omega) \sin \omega t \quad (13.9)$$

Una masa m' a distancia r girando a velocidad angular ω produce una fuerza centrípeta de magnitud

$$F_m(\omega) = m' a_n = m' r \omega^2 \left(\frac{p^2}{p^2} \right) = \underbrace{m' r p^2}_{F'_m} \gamma^2 = F'_m \gamma^2 \quad (13.10)$$

La solución es $x = x_m \sin \omega t$ con

$$x_m = \underbrace{F_A \gamma^2}_{F'_A} \frac{F'_m}{k} = F'_A \frac{F'_m}{k} \quad (13.11)$$

entonces el factor de amplificación

$$F'_A = \frac{\gamma^2}{(1 - \gamma^2)} \quad (13.12)$$

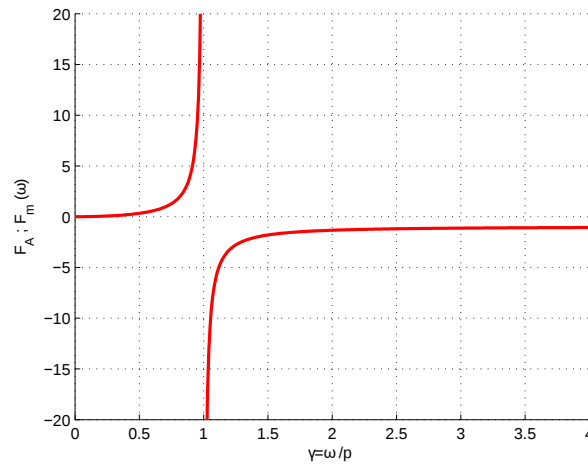


Figura 13.6: Respuesta dinámica para rotor con desbalanceo.

tiene a γ^2 en el numerador con respecto a F_A . En el caso del desbalanceo, la respuesta dinámica mostrada en la Figura 13.6 tiene un origen en 0 cuando γ tiende a 0 y tiene una asíntota en -1 cuando γ tiende a infinito.

13.3.3 Vibración forzada con amortiguación viscosa

Consideremos el término de amortiguamiento en la E.D.O. haciéndola completa

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \quad p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m}$$

Vimos que la solución general es de la forma

$$x(t) = x_H + x_P$$

- La solución de la homogénea más general con $q = \sqrt{p^2 - n^2}$ es

$$x_H = e^{-nt} (A' \sin(qt) + B' \cos(qt)) = x'_m e^{-nt} \sin(qt + \phi')$$

- La solución particular es

$$x_P = x_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Luego, la solución completa es

$$x(t) = x_H + x_P = x'_m e^{-nt} \sin(qt + \phi') + x_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Reemplazamos la particular $x_m \sin(\omega t - \varphi)$ y sus derivadas en la E.D.O.,

$$-x_m \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2n x_m \omega \cos(\omega t - \varphi) + x_m p^2 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t)$$

Para despejar la amplitud x_m y la fase φ se consideran dos instantes:

$$\begin{cases} \omega t - \varphi = 0 \rightarrow \omega t = \varphi & 2n x_m \omega = \frac{F_m}{m} \sin(\varphi) \\ \omega t - \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + \varphi & -x_m \omega^2 + x_m p^2 = \frac{F_m}{m} \cos(\varphi) \end{cases}$$

De ambas ecuaciones se despeja

$$x_m = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + [2 \frac{n}{p} \frac{\omega}{p}]^2}}_{F_A}} \frac{F_m}{k} = F_A x_E \quad \varphi = \arctan \left(\frac{2 \frac{n}{p} \frac{\omega}{p}}{1 - (\omega/p)^2} \right)$$

La solución particular es

$$x = F_A x_{Esen}(\omega t - \varphi)$$

Por ejemplo, para un sistema masa-resorte-amortiguador con los siguientes parámetros: $m = 1$ Kg, $k = 500$ N/m, y $b = 9$ Kg/s se aplica una fuerza excitadora con amplitud $F_m = 235$ N y frecuencia $\omega = 134,160,5$ 1/s mostrada en la Figura 13.7(centro). Para las condiciones iniciales $x_0 = 0$ m y $v_0 = 2$ m/s se muestran sus respuestas libre en la Figura 13.7(arriba) y forzada en la Figura 13.7(debajo). En esta última, se observa que la oscilación amortiguada se disipa en 1 s y predominará luego la forzada en régimen.

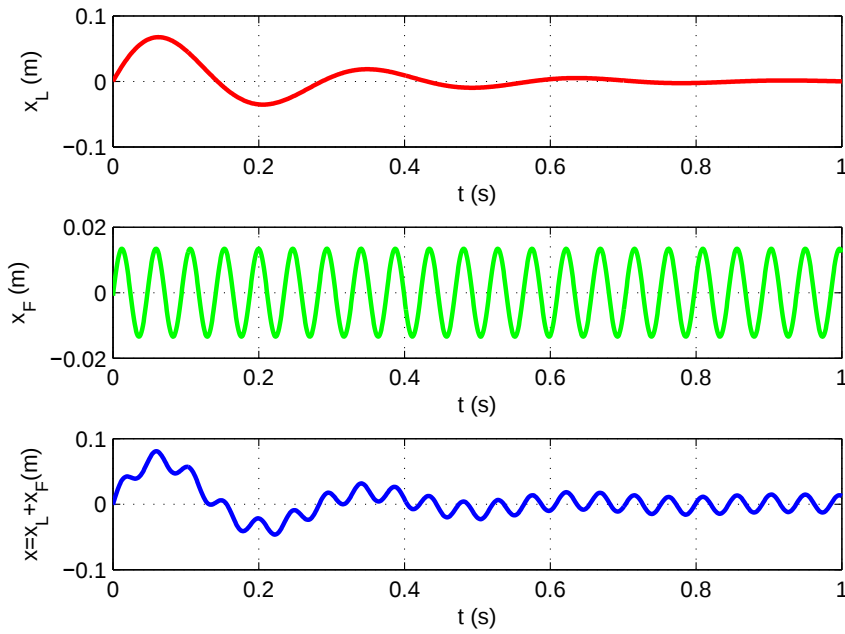


Figura 13.7: Ejemplos de vibración libre (rojo), fuerza excitadora (verde) y respuesta forzada por la fuerza excitadora (azul)

En forma adimensionalizada, dividiendo a la frecuencia de excitación ω y el amortiguamiento n respectivamente por la frecuencia natural, $\gamma = \omega/p$ y $\zeta = n/p$, el factor de amplificación y la fase resultan:

$$F_A = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2}\right) \quad (13.13)$$

En la Figura 13.8(izq.), para el Factor de Amplificación se observa:

- Con $\zeta = 1$ el amortiguamiento es crítico ($n = p$) y para $\gamma > 0$ no hay amplificación de la amplitud de la vibración.
- A partir de $\zeta = 0,6$ el factor de amplificación es menor que 1 para cualquier relación de frecuencias.

En la Figura 13.8(der.), para la diferencia de fase entre excitación y vibración (válida cuando F_m es independiente de ω) se observa:

- A baja frecuencia de excitación, el desfase es pequeño y crece hasta 90° en la condición de resonancia $\gamma = 1$, luego, tiende a 180° para frecuencias de excitación altas.
- Cuando el amortiguamiento es pequeño $\zeta \approx 0$ existe un cambio brusco de fase a contrafase para $\gamma = 1$ conforme se incrementa la frecuencia de excitación ω . Esta transición se suaviza conforme se incrementa la relación de amortiguamiento ζ .

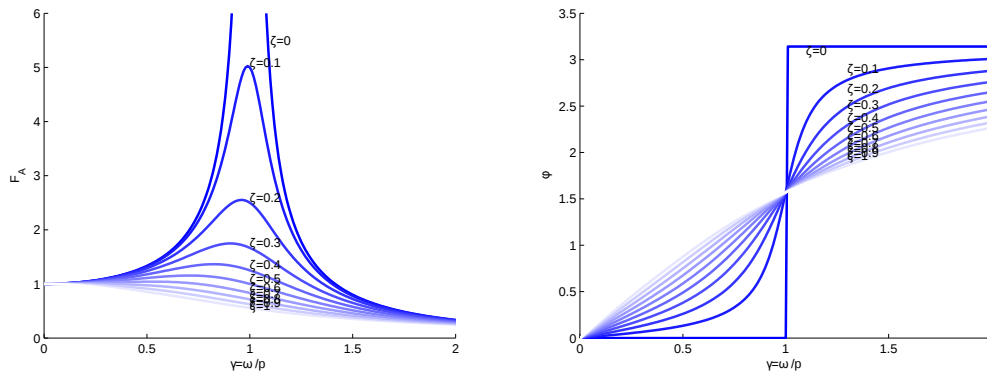


Figura 13.8: Factor de amplificación (izq.) y ángulo de fase (der.) para distintos factores de amortiguamiento viscosos.

Para el caso de F_m dependiente de ω , correspondiente a desbalanceo de rotor con amortiguamiento, en el factor de amplificación

$$F'_A = \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$

graficado en la Figura 13.9 para distintos factores de amortiguamiento, muestra que tiene asíntota en 1 para γ tendiendo a infinito.

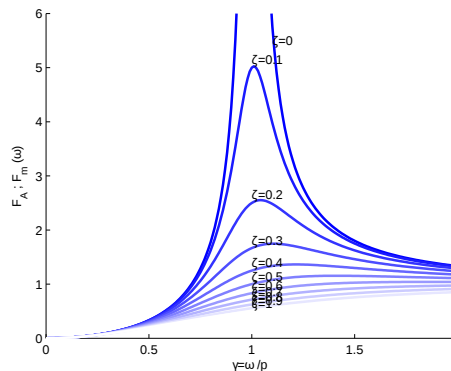


Figura 13.9: Factor de amplificación para rotor con desbalanceo.

13.4 Fuerzas transmitidas, control y aislamiento de vibraciones

Vimos que en un sistema de una masa vinculada a una base fija mediante una suspensión elástica y un amortiguador, sujeta a una fuerza armónica de amplitud independiente de su frecuencia, tiene una expresión dinámica

$$P_a + P_e + W + F = ma \quad (W = mg = k\delta_e)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_m \sin(\omega t)$$

Sólo las fuerzas $F_e = kx = -P_e$ y $F_a = bv = b\dot{x} = -P_a$ se transmiten a la base a través de los vínculos conformando la fuerza excitadora

$$F = F_{\text{efectiva}} + F_e + F_a = ma + bv + kx$$

La respuesta es de la forma

$$x(t) = x_m \sin(\omega t - \varphi) = F_A x_E \sin(\omega t - \varphi)$$

y podemos determinar las fuerzas transmitidas en función del tiempo como:

$$F_e(t) = \underbrace{k x_m}_{F_{em}} \sin(\omega t - \varphi) = F_{em} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$F_a(t) = \underbrace{b x_m \omega}_{F_{am}} \cos(\omega t - \varphi) = F_{am} \cos(\omega t - \varphi)$$

El valor total $F_T(t)$ de ambas fuerzas transmitidas se halla teniendo en cuenta que están desfasadas 90° pero son funciones armónicas de igual período, operamos por composición

$$\begin{aligned} F_T(t) &= F_e(t) + F_a(t) \\ &= k x_m \sin(\omega t - \varphi) + b x_m \omega \cos(\omega t - \varphi) \\ &= F_{em} \sin(\omega t - \varphi) + F_{am} \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

de modo que la amplitud es

$$\begin{aligned} F_{Tm} &= \sqrt{F_{em}^2 + F_{am}^2} = \sqrt{(k x_m)^2 + (b \omega x_m)^2} \\ &= k x_m \sqrt{1 + \left(2 \frac{b}{b_c} \frac{\omega}{p}\right)^2} = k \underbrace{x_m}_{F_A \frac{F_m}{k}} \sqrt{1 + (2\zeta\gamma)^2} = F_m \underbrace{\frac{\sqrt{1 + (2\zeta\gamma)^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}}_{T_F} \\ &= T_F F_m \end{aligned}$$

donde

$$T_F = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\gamma)^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \quad (13.14)$$

se denomina *Transmisibilidad de la fuerza*. Es la relación entre la máxima fuerza transmitida y la fuerza de excitación, o bien, es el valor por el que hay que multiplicar a la fuerza de excitación para obtener la máxima fuerza transmitida.

La gráfica de T_F se muestra en la Figura 13.10. La zona I se puede considerar $0 \leq \gamma \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ y luego, existe un punto característico para $\gamma = \sqrt{2}$ en el que $T_F = 1$ y que delimita el fin de la zona II.

Si existiese una dependencia de F_m con ω , luego

$$T'_F = T_F \gamma^2 = \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + (2\zeta\gamma)^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$

y la gráfica se muestra en la Figura 13.11. Claramente, en la zona I no se amplifican las vibraciones pero se amplifican considerablemente en la zona III, más allá de $\gamma = \sqrt{2}$.

13.5 Aislamiento de oscilaciones

Analizamos la amplificación de la Ec. (13.13) graficada nuevamente en la Figura 13.12(izq.)

La *respuesta dinámica* tiene diferente comportamiento en cada zona

- Zona I ($\gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$): es similar a la excitación, cambia con γ y se reduce aumentando ζ con efecto de amortiguación pequeño.
- Zona II ($\frac{\sqrt{2}}{2} < \gamma < \sqrt{2}$): puede diferir mucho de la excitación con máximos cercanos a $\gamma = 1$, y se reduce aumentando ζ con importante efecto de amortiguación.

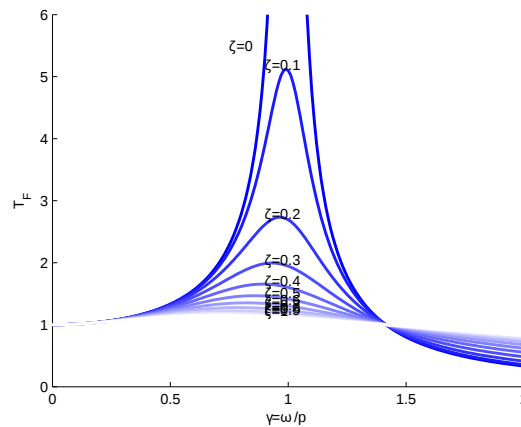


Figura 13.10: Transmisibilidad de las fuerzas con fuerza excitadora independiente de la frecuencia.

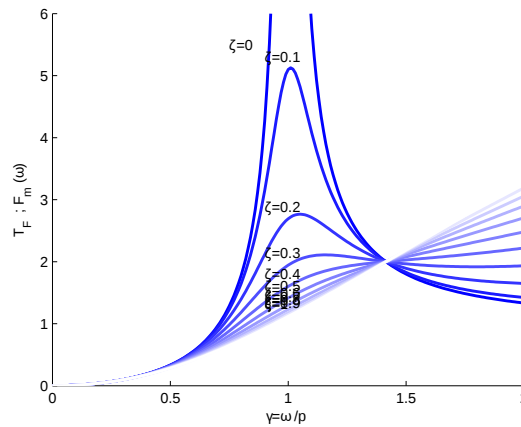


Figura 13.11: Transmisibilidad de fuerzas con fuerza excitadora dependiente de la frecuencia.

- Zona III ($\gamma > \sqrt{2}$): es menor que la excitación, tiende a anularse cuando γ aumenta produciendo un *aislamiento* del sistema, y se reduce aumentando ζ .

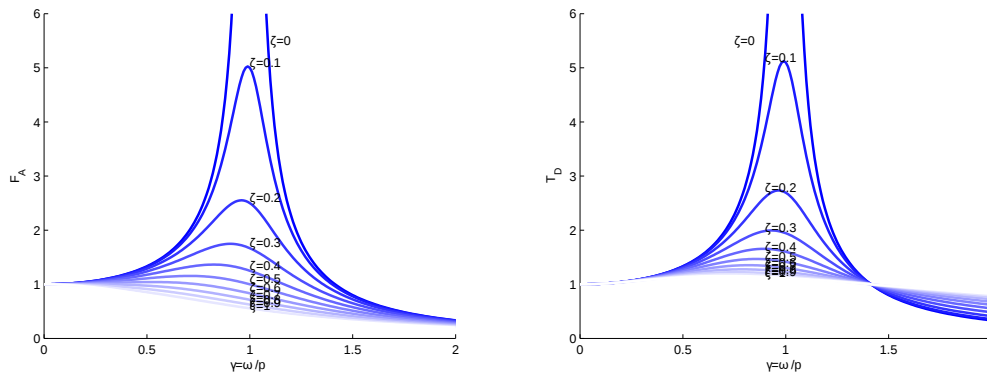


Figura 13.12: Factor de amplificación (Izq.) y Transmisibilidad de Desplazamiento (der.), respectivamente para fuerza y desplazamiento de excitación independientes de la frecuencia.

Analizamos la transmisibilidad de desplazamiento de la Ec. (13.14) graficada en la Figura 13.12(der.) La fuerza (desplazamiento) excitadora sobre el cuerpo (en la base) se transmite a la base (al cuerpo) con valores modificados por el efecto dinámico

- Zona I ($\gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$): es poco mayor que la excitación, aumenta con γ y se reduce aumentando ζ con efecto de amortiguación pequeño.
- Zona II ($\frac{\sqrt{2}}{2} < \gamma < \sqrt{2}$): puede diferir mucho de la excitación con máximos cercanos a $\gamma = 1$, y se reduce aumentando ζ con importante efecto de amortiguación.
- Zona III ($\gamma > \sqrt{2}$): es menor que la excitación, tiende a anularse cuando γ aumenta produciendo un *aislamiento* del sistema, y aumenta aumentando ζ .

13.6 Aislamiento de oscilaciones en fundación de máquinas e instrumentos eléctricos

Los sistemas de control se pueden clasificar en dos tipos

- El **control pasivo** consiste en cambiar parámetros del sistema $\gamma = \frac{\omega}{p}$ y $\zeta = \frac{b}{b_c}$ por medio de la frecuencia de la excitación ω (factible si es debido a desbalanceo e infactible si es condición de trabajo de la máquina) o mediante los parámetros m , b y k .
- El **control activo** se utiliza mediante fuente de energía externa que contrarresta las vibraciones con sistemas provistos de sensores y actuadores controlados por computadoras ó microprocesadores en sistemas de control por lazo cerrado (Ejs.: mesas antivibratorias en metrología, masas oscilantes en edificios rascacielos, control de suspensión y estabilidad de rolo/deriva en automóviles, etc.).

Objetivos del control pasivo ($\gamma = \frac{\omega}{p}$ y $\zeta = \frac{b}{b_c}$):

1. Que el sistema trabaje en la zona I. Para ω fijo, se busca reducir γ siendo p bajo con una rigidez k alta y/o masas m pequeñas (Ejs: indicadores de presión, acelerómetros).
2. Que el sistema atraviese en forma amortiguada la zona II para trabajar en la zona III. Se busca aumentar ζ y es importante en el arranque y parada de máquinas que atraviesan la condición de resonancia en forma frecuente (Ejs. máquinas rotativas con desbalanceo residual, grupos electrógenos, compresores, bombas centrífugas, etc.).
3. Que el sistema trabaje en la zona II a propósito (Ejs.: Resonadores, apisonadoras, alisadoras, zarandas, maquinaria de impacto, etc.).
4. Que el sistema trabaje en la zona III para disminuir la transmisibilidad de la fuerza excitatriz (ej.: Máquinas con rotor desequilibrado) o del desplazamiento excitador (ej: vibrógrafo, sismógrafos, balanzas). Se obtiene aumentando γ , con una suspensión blanda (poco rígida o k bajo) y/o una masa m grande, y disminuyendo ζ con resortes metálicos de baja histéresis.

Para el *aislamiento*, se busca trabajar en la zona III y bajar la:

1. Transmisibilidad de la fuerza de una máquina a su fundación (ej: máquina rotativa con rotor desbalanceado).
2. Transmisibilidad del desplazamiento de la fundación a una máquina o equipamiento de interés. Ejs: máquina de mecanizado de precisión a CNC, máquina de medición por coordenadas (MMC).

Existen soportes aisladores de vibración comerciales compuestos de elastómeros y resortes con una proporción de k y b conveniente.



Figura 13.13: Aisladores antivibratorios

Como la transmisibilidad no se puede anular, los valores aceptables son $T_F \approx 0,1$ y $T_D \approx 0,1$, con

$3 \leq \gamma \leq 4$ para bajos valores de amortiguación ζ , la necesaria para atravesar la condición de resonancia. En la Figura 13.14 se grafica el TD hasta $\gamma = 4$ para dar cuenta de la región de trabajo.

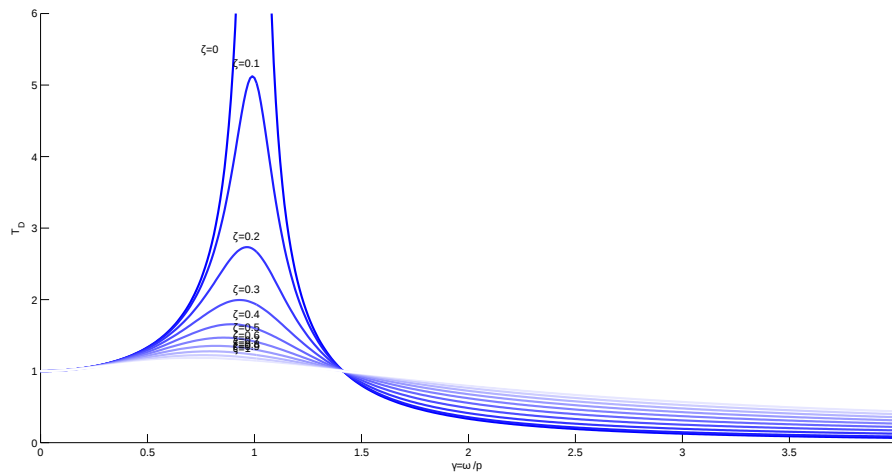


Figura 13.14: Gráfica de transmisibilidad de desplazamiento hasta $\gamma = 4$

13.7 Oscilaciones eólicas en líneas de transmisión eléctrica.

En primer lugar es necesario distinguir vibraciones forzadas de vibraciones autoexcitadas para luego presentar ejemplos en tendidos eléctricos.

Vibraciones forzadas vs autoexcitadas:

1. Vibración forzada: La fuerza alternativa que establece el movimiento existe independientemente del mismo y persiste incluso cuando el movimiento vibratorio se detiene. La fuerza de amortiguamiento es frenante.
2. Vibración autoexcitada o autoinducida: La fuerza alternativa que establece el movimiento está creada por el movimiento mismo; al cesar el movimiento, la fuerza alternativa desaparece. La fuerza de amortiguamiento es impulsora.

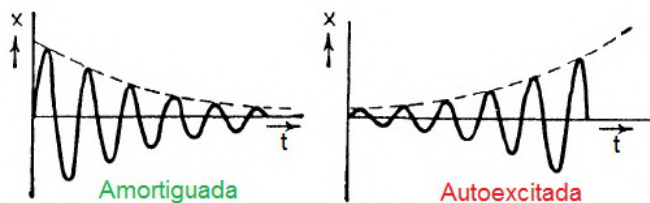


Figura 13.15: Concepto de vibración amortiguada vs autoexcitada (izq.). Aisladores Stockbridge para tendidos eléctricos (der.)

Los fenómenos meteorológicos y ambientales pueden producir fuerzas variables por compleja interacción fluido estructura sometiendo a los tendidos eléctricos a vibraciones autoexcitadas de alta y baja frecuencia.

1. *Viento*: El viento puede ser constante, un flujo estacionario y laminar, y sin embargo produce fuerzas variables sobre los conductores debido a los vórtices de von Kármán. En dirección

transversal al viento, producen en los conductores vibraciones de baja amplitud (de 0.01 a 1 vez el diámetro del conductor) y alta frecuencia (que pueden ir de 3 hasta 150 Hz). Se las conoce como vibraciones eólicas; en inglés, el efecto se lo conoce como **flutter** o **aeolian vibrations**. Los conductores más delgados vibran a frecuencias más altas que los gruesos. Estas vibraciones ocurren con vientos moderados de 1 a 7 m/s. La frecuencia de desprendimiento de vórtices puede igualar a la frecuencia natural del conductor y comienza a vibrar verticalmente con 2 ó 3 ondas por vano.

2. **Nieve:** La nieve cambia la forma de la sección transversal del conductor ante un viento o una corriente térmica ascendente, produciendo fuerzas con componentes en dirección de la velocidad que excitan el movimiento. Produce vibraciones de grandes amplitudes (medidas en metros) con muy baja frecuencia (0.08 a 3 Hz) y el efecto se denomina **Galopeo/Galloping**.

Los tendidos eléctricos se proyectan eligiendo adecuadamente los materiales así como los absorbedores dinámicos específicos para la localización del proyecto y sus condiciones climáticas.

Sobre los cables de los tendidos eléctricos y en las estructuras también, el viento produce vibraciones inducidas por vórtices. En una sección circular los vórtices producen fuerzas oscilantes debido a las estelas de vórtices. Las estelas tienen varios regímenes conforme aumenta la velocidad del viento, pasan de tener vórtices simétricos a alternantes. Ambos fenómenos se ilustran en la Figura 13.16. La

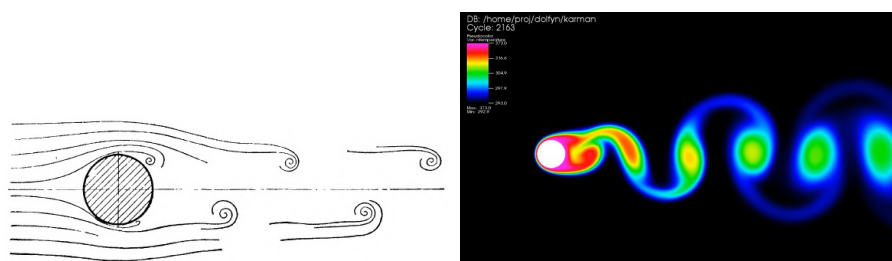


Figura 13.16: Vórtices de von Kàrman alrededor de una sección circular.

deposición de nieve en cables puede producir fuerzas de succión por diferencias de presión debido al paso del viento (como la succión o *lift* producido en el ala de un avión) generando fuerzas sobre los cables como se ilustra en la Figura 13.17.

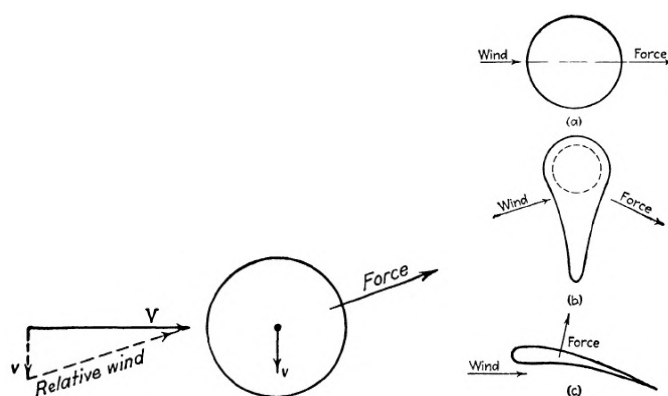


Figura 13.17: Efectos del viento sobre secciones circulares y con nieve.

Se sugiere visitar estos videos para ver estos fenómenos aeroelásticos:

- Vórtices alrededor de un cilindro: <http://www.youtube.com/watch?v=IDeGDFZSYo8>
- Galopeo de tendidos eléctricos: <https://youtu.be/GEGbYRii1d4>
- Daño por galopeo en Chubut: a -37 grados, caída de 55 torres de líneas de alta tensión (330kV) desde la central Futaleufú hasta Puerto Madryn (Transpa S.A.):
https://www.youtube.com/watch?v=AJ_ZaJ-BAc8
<https://www.youtube.com/watch?v=Sh4YkK-ImS8>



Figura 13.18: Destrucción de tendidos y torres de alta tensión por galopeo en Chubut, Argentina en 2021.

La energía suministrada por el viento al conductor debe disiparse a través del autoamortiguamiento del conductor y fricciones internas, la excitación de amortiguadores adosados (de masa sintonizados tipo Stockbridge, de impacto tipo Festoon, etc.), y en los soportes de amarre elastoméricos.

Las fuerzas externas inducidas por vibraciones en las líneas de transmisión eléctrica pueden producir daños mecánicos

1. *Fatiga*: El galopeo y el aleteo de las líneas de transmisión produce daños por fatiga. Las amplitudes se pueden atenuar con separadores debidamente colocados o dando resistencia y rigidez a los conductores mediante refuerzos de acero interiores o mediante amortiguamiento intrínseco logrado por envainados plásticos o por amortiguamiento externo.
2. *Fricción y desgaste puntuales (freeting)*: Al vibrar, los paquetes de conductores friccionan entre sí produciéndose desgaste de conductores internos y desgaste de los exteriores en las zonas de las morsas de sujeción.

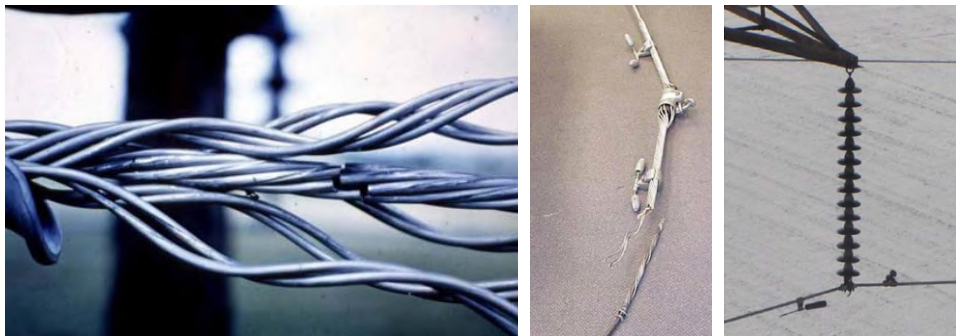


Figura 13.19: Rotura de conductores por fretting y fatiga.

13.8 Absorbedores dinámicos

Una forma de disminuir la energía de las vibraciones es colocar **absorbedores dinámicos** trabajando como amortiguadores. Los absorbedores pueden ser de dos tipos:

1. *Externo al conductor*: Se adosan masas que permiten absorber parte de la energía cinética del cable vibrante.
2. *Interno del conductor*: Construcción especial del conductor.

Entre los absorbedores externos los más utilizados son los del tipo Stockbridge con cable mensajero, mostrado en la Figura 13.20(izq.) que consisten de masas sintonizadas adosadas a pequeños cables

flexibles sujetos por su centro al cable principal, los hay de tipo simétrico y asimétricos. Se colocan cerca de los soportes del cable a proteger.

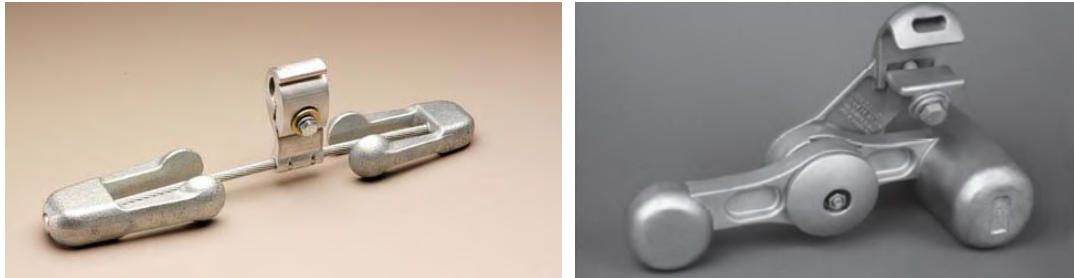


Figura 13.20: Absorbedores dinámicos para tendidos eléctricos: Stockbridge con cable mensajero (izq.); HydroQuebec con pivot amortiguado, sin cable mensajero (der.).

Según el modelo simplificado unidimensional se los puede clasificar como:

1. *Amortiguador de masa sintonizado TMD*: Trabaja cuando la frecuencia de excitación del cable se aproxima a la de resonancia aunque no provee de amortiguamiento (Stockbridge).
2. *Amortiguador de masa sintonizado amortiguado TMDA*: Tiene además un amortiguamiento. El HydroQuebec posee un amortiguamiento torsional elastomérico.

Estos absorbedores se estudiaron en la década del 50 (Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw Hill (1947). Para los del tipo de masa sintonizado, se define a la relación entre la masas adosada y del cable como $\mu = m_2 / m_1$, con la frecuencia propia del sistema adosado $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ igual a la frecuencia de la excitación.

Los modelos esquemáticos más simples se presentan en la Figura . Claramente, los TMD no poseen amortiguamiento alguno, mientras que los TMDA poseen amortiguamiento entre las masas.

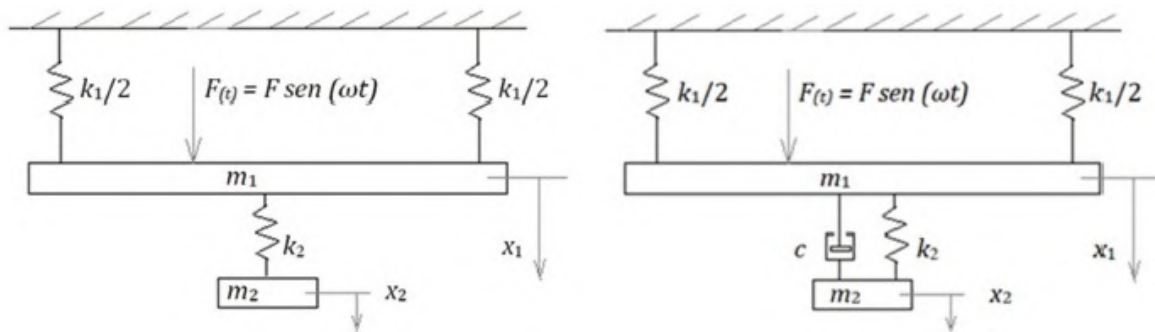


Figura 13.21: Modelos unidimensionales: Los TMD no poseen amortiguamiento (izq.). Los TMDA poseen amortiguamiento entre las masas (der.).

La respuesta de un TMD mostrada en la Figura 13.22 claramente posee dos asíntotas verticales y en el conductor real se recurría al autoamortiguamiento del conductor y de los soportes para que los desplazamientos no tiendan a infinito. La masa absorbidora más pequeña vibra en contrafase en la zona de resonancia.

Al agregar amortiguamiento a un TMD, se obtiene un TMDA y las respuestas se atenúan considerablemente, pudiéndose encontrar una relación de masas que aplane las amplitudes, como se muestra en la Figura 13.23 para una máquina.

Los absorbedores se ensayan en experimentos normalizados realizados en bancos que emulan las fijaciones y vibración forzada. El banco es similar al esquematizado en la Figura 13.24. Un banco preciso puede incluir varios vanos y amarres reales, como el de HydroQuebec mostrado en la Figura 13.25.

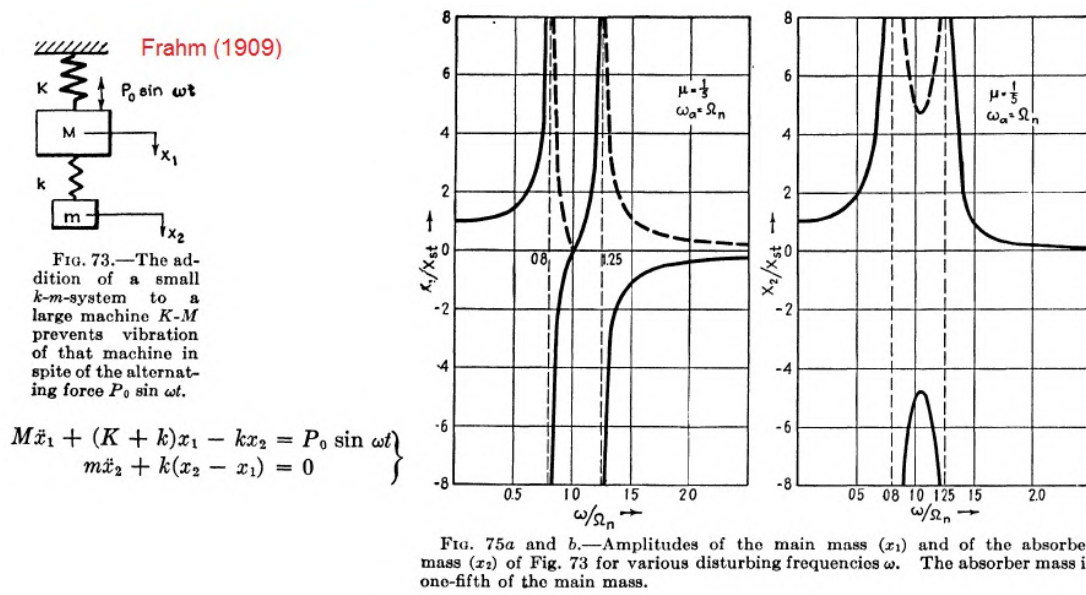


Figura 13.22: Respuestas TMD de la masa principal m_1 y la adosada m_2 . Se utiliza una relación de masas: $\mu = m_2/m_1 = 1/5$

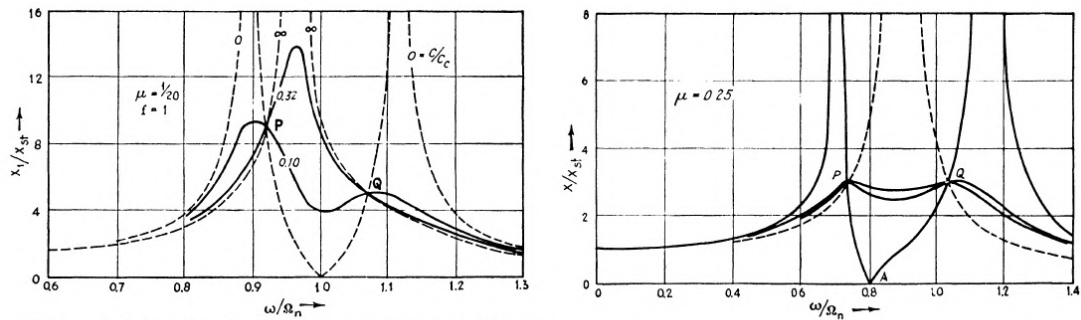


Figura 13.23: Respuestas TMD Amortiguado: Relación de masas: $\mu = m_2/m_1 = 1/20$ y óptimo en $\mu = m_2/m_1 = 1/4$

Andrés F. F. Macaluso

Vibración de conductores en líneas aéreas de transmisión

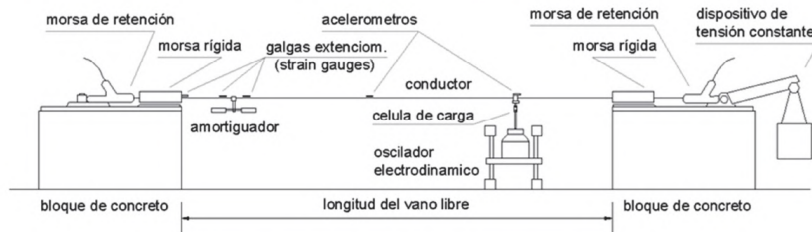


Figura 4.9 - Diseño de banco de prueba para la medición de la eficiencia de amortiguadores, de acuerdo con la normalización del IEC 61897 (1998) e IEEE Std 664 (1993).

Figura 13.24: Banco de ensayo de absorbentes dinámicos. Tesis de grado: Ing. Andrés Macaluso

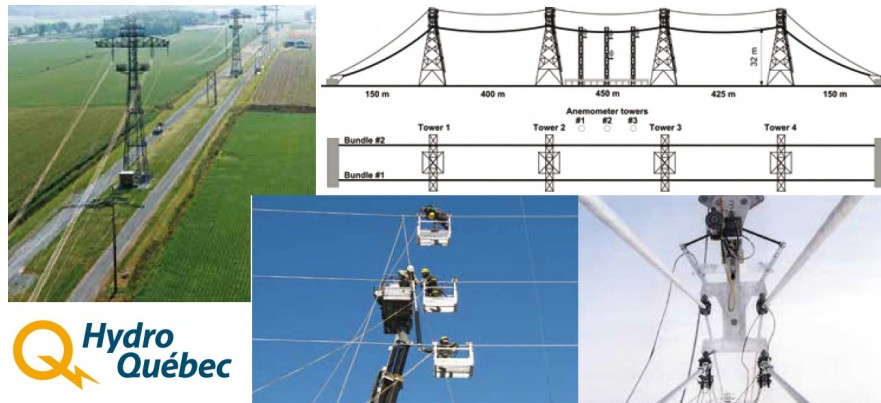


Figura 13.25: Banco de ensayo de absorbedores dinámicos de HydroQuébec

13.8.1 Recolectores de energía del movimiento

¿Existen formas de aprovechar los vórtices de von Karman?

Hasta hace unos años el concepto Vortex Bladeless basado en vibraciones inducidas por vórtices era futurístico. Actualmente es una tecnología en desarrollo con numerosas pruebas exitosas. Una viga flexible tiene adosado un captador de vibraciones inducidas por vórtices. La viga además posee espiras en donde se genera energía al moverse en el campo magnético que generan imanes permanentes de Neodimio. El mismo generador provee del amortiguamiento para que la viga vertical no oscile hasta la resonancia.



Figura 13.26: Concepto de generador eólico sin aspas VortexBladeless; <https://vortexbladeless.com/es/desarrollo-tecnologia/>

La Figura 13.27 muestra resultados de simulación CFD y electromagnética para estimar la generación de un sistema eólico sin aspas. El trabajo lo realizó como tesis final de grado el Ing. Federico Luna. Además, obtuvo una mención de honor en el concurso de pósters de estudiantes del Congreso Argentino de Mecánica Computacional - MECOM 2021.

Existen otras formas de aprovechar energía desde otras vibraciones inducidas por viento mediante arreglo de vibradores de tipo ala de avión (por flameo o fluttering) y de las olas (undimotriz).

También existen recolectores de energía de movimientos producidos por el caminar de las personas y por otras vibraciones. Estos productos se conocen como [Energy harvester](#)s, como el mostrado en la Figura 13.28.

Como conclusión, es de interés vigente la recolección de energía desde las vibraciones. Sin dejar de lado que siempre fue de interés mitigar las vibraciones cuando las mismas son indeseadas para la transmisión de energía, las máquinas de generación eléctrica y de otro tipo de producción.

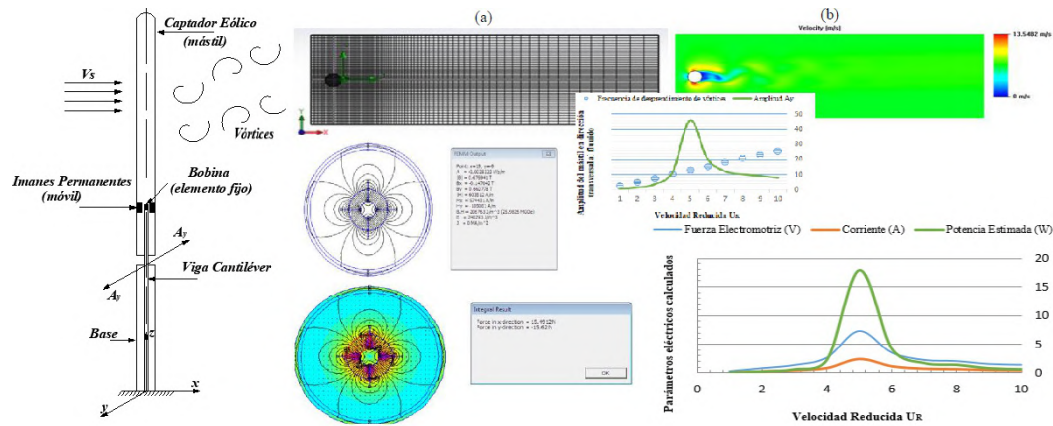


Figura 13.27: Simulación estructural, de dinámica de fluidos y electromagnética para generador eólico sin aspas; <https://drive.google.com/file/d/1zmyK6VIC2ZmeccDEjBGXs742JDrQgc8J/view>.



Figura 13.28: Recolección de energía producida por el paso de los peatones; ver Pavegen <https://youtu.be/VD15-2Uriyc>

14. Sistemas electromecánicos

En este capítulo se describe el modelado de sistemas oscilantes mecánicos y eléctricos y su analogía [BJC10, Cap. 19]. Además, se provee un ejemplo del modelado electromecánico de un motor eléctrico [Bol01] deduciendo las ecuaciones diferenciales de su dinámica necesarias para su modelado, simulación y control. Luego, se introduce a conceptos generales de modelado avanzado de sistemas electromecánicos y su simulación. Finalmente, se presenta el método de Lagrange para el planteo de las ecuaciones del movimiento y se termina con el Método de la Transformada de Laplace para resolver sistemas ya vistos en el curso.

14.1 Sistemas mecánicos en traslación y rotación

Hemos visto que un sistema unidimensional de masa, resorte y amortiguador en paralelo con una excitación forzada tiene una ecuación del movimiento para traslación dada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_m \sin(\omega t) \quad (14.1)$$

que es similar que para la rotación unidimensional

$$I\ddot{\theta} + b_\theta\dot{\theta} + k_\theta\theta = M_m \sin(\omega t) \quad (14.2)$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden, no homogéneas, a coeficientes constantes tienen, matemáticamente, el mismo procedimiento de resolución y análisis.

Para la primera, planteamos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + p^2x = \frac{F_m}{m} \sin(\omega t) \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2n = \frac{b}{m}$$

y para la rotación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n\frac{d\theta}{dt} + p^2\theta = \frac{M_m}{I} \sin(\omega t) \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \quad 2n = \frac{b_\theta}{I}$$

luego, podemos proceder analíticamente o bien por simulación numérica. Habíamos visto también la analogía de la ecuación diferencial con el péndulo simple en pequeñas oscilaciones.

Veremos a continuación la analogía con circuitos y sistemas eléctricos.

14.2 Sistemas eléctricos

14.2.1 Circuito RLC serie oscilante libre

Considere el siguiente circuito serie RLC en donde un condensador C se carga primero mediante una fuente de tensión continua E , es decir, sólo el capacitor se conecta en paralelo con la fuente y adquiere una carga q_0 . En el instante t_0 en que se invierte el interruptor de la posición A a la B se conecta el capacitor al circuito con la resistencia y el inductor y el condensador funciona como

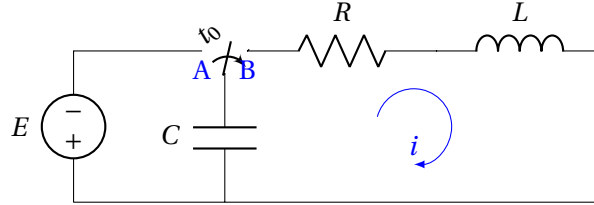


Figura 14.1: Circuito RLC oscilante libre.

una fuente de fuerza electromotriz $v_c = -\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt$ mientras que en la bobina y en la resistencia se producen las caídas de tensión $v_L = -L \frac{di}{dt}$ y $v_R = -R i$ respectivamente, oponiéndose al paso de la corriente. Inicialmente, el valor de v_c es $-\frac{q_0}{C}$ y la corriente i crece mientras el capacitor se descarga. La energía magnética y eléctrica se intercambian en forma oscilatoria, y se disipan debido a la resistencia hasta que $q = 0$.

14.2.2 Circuito RLC serie de corriente alterna

Un circuito eléctrico RLC serie está alimentado por una fuente de voltaje $E(t)$ proveedora de tensión alterna y tiene por elementos: un resistor de resistencia R , un inductor de inductancia L y un capacitor de capacitancia C , conectados en serie como se muestra en la Figura 14.2. Se denota por i a la corriente y por q a la carga eléctrica en el capacitor.

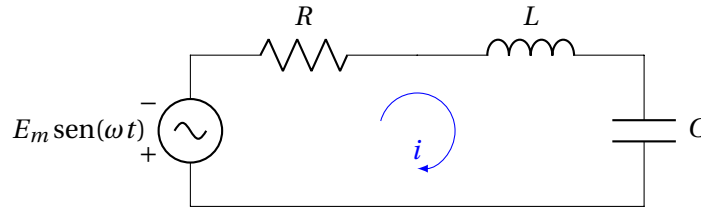


Figura 14.2: Circuito RLC serie.

La caída de potencial en el inductor es $L \frac{di}{dt}$, en el resistor es Ri y en el capacitor es $\frac{q}{C}$. La caída de tensión en un circuito cerrado debe ser cero:

$$E_m \sin(\omega t) - L \dot{i} - Ri - \frac{1}{C} q = 0 \quad (14.3)$$

y reordenando, se obtiene

$$L \dot{i} + Ri + \frac{1}{C} q = E_m \sin(\omega t). \quad (14.4)$$

Como $q = \int i dt$, la expresión de arriba es integro-diferencial en la función corriente $i(t)$. Conviene utilizar que la corriente es la tasa temporal de cambio de la carga, es decir, que $i = \frac{dq}{dt}$ y $\dot{i} = \frac{d^2 q}{dt^2}$ y la ley de tensiones queda completamente en términos de la función carga $q(t)$ como

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = E_m \sin(\omega t) \quad (14.5)$$

quedando una expresión análoga a los sistemas mecánicos en paralelo; ver ecuaciones (14.1) y (14.2), de modo que se puede plantear

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2n \frac{dq}{dt} + p^2 q = \frac{E_m}{L} \sin(\omega t) \quad p = \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad 2n = \frac{R}{L} \quad (14.6)$$

y resolverlo analíticamente.

14.3 Analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos

La analogía entre el sistema mecánico paralelo ((14.1) y (14.2)) y el circuito oscilante serie RLC (14.5) se debe al comportamiento análogo de sus elementos constituyentes.

Tabla 14.1: Analogías de sistemas mecánicos y eléctricos

Sistema	Mecánico paralelo	Circuito eléctrico oscilante serie
	m Masa	L Inductancia
	b Coeficiente de amortiguación viscosa	R Resistencia
	k Constante de rigidez del resorte	$\frac{1}{C}$ Recíproco de la capacitancia
Variable	x Desplazamiento	q Carga
Flujo	v Velocidad	i Corriente
Esfuerzo	F Fuerza aplicada	E Voltaje aplicado

La masa de un cuerpo representa la inercia al cambio de velocidad y en el inductor la inductancia representa la inercia al cambio del campo magnético con respecto al voltaje aplicado.

El amortiguador mecánico es un disipador de energía al igual que la resistencia eléctrica, la cual disipa energía en forma de calor.

El resorte almacena energía potencial elástica y la devuelve del mismo modo que lo hace el capacitor con la carga eléctrica.

Matemáticamente, es conveniente plantear las ecuaciones diferenciales como las derivadas del flujo, es decir, en términos del desplazamiento para el sistema mecánico y en términos de la carga para el circuito eléctrico. Para utilizar métodos numéricos, el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede reducir a primer orden duplicando el número de ecuaciones.

En sistemas dinámicos se define al *esfuerzo generalizado* y al *flujo generalizado* como variables conjugadas, es decir, su producto es una potencia. En el sistema mecánico el esfuerzo es la fuerza aplicada, propiamente dicha, y el flujo es la velocidad. En el sistema eléctrico, el esfuerzo es el voltaje aplicado y el flujo es la corriente eléctrica. A continuación veremos un ejemplo electromecánico y finalmente una analogía más amplia relacionada a los sistemas dinámicos.

14.4 Conceptos generales sobre el modelado y simulación de sistemas electromecánicos

Para el planteo de las ecuaciones del movimiento se mostrará el Método de Lagrange, el cual es aplicable a otros dominios energéticos.

Existen varios niveles de modelado matemático que se adecúan para utilizar herramientas de simulación de sistemas electromecánicos y permiten acoplar fenómenos físicos de interacción mecánica y eléctrica:

- Resolución directa, cálculo simbólico (Mathematica[®], Maxima) y numérico (Matlab[®], Octave, NumPy) de:
 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs/ODEs)
 - Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs/PDEs): VF, FEM, X-FEM, BEM, IGA.
 - Ecuaciones Algebraico Diferenciales (EAD/DAEs)
- Resolución mediante métodos operacionales: ej. Transformada de Laplace (Matlab Simulink[®])
- Modelado energético general con Grafos de Enlaces / Bond Graphs (20sim[®], Dymola[®], Bond-Sim, OpenModelica).

14.5 Introducción al Método de Lagrange

El método se basa en realizar derivadas sobre funcionales definidos por coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas $(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ que definen el estado del sistema, para así hallar la relación con las aceleraciones y por lo tanto obtener las ecuaciones del movimiento; luego, integrando estas ecuaciones se obtienen las trayectorias que lo describen.

Un funcional hace corresponder funciones y derivadas de funciones de las coordenadas generalizadas con un escalar, en nuestro caso, la energía cinética es un funcional y la energía potencial también. Su suma o resta también será un funcional. En particular, su resta es denominado Lagrangiano del sistema

$$\underbrace{L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}})}_{\text{Lagrangiano}} = \underbrace{T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}_{\text{E.Cinética}} - \underbrace{V(\mathbf{q})}_{\text{E.Potencial}} \quad (14.7)$$

y es función de las coordenadas generalizadas, del tiempo, y de las derivadas de las coordenadas generalizadas.

Obtenido el Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ que define a un sistema mecánico, se plantea a la *acción* como la integral del Lagrangiano entre dos tiempos.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (14.8)$$

Los sistemas físicos evolucionan minimizando la acción, es decir, las coordenadas siguen una “trayectoria” en que la variación de la acción es cero, $\delta S = 0$ y a esto se lo conoce como *Principio de Hamilton* o *Principio de mínima acción*. La *variación* puede verse como análoga a un diferencial, pero es más precisamente una perturbación arbitraria $\delta \mathbf{q}$ del funcional en la dirección de las coordenadas $\mathbf{q}$, que afecta a sus derivadas $\dot{\mathbf{q}}$ y no afecta al tiempo t .

Para explicar esto necesitaremos introducirnos al Cálculo Variacional y aplicar integración por partes algo complicadas [LL94, págs. 1-5] que no incluiremos aquí. En forma más práctica, de la expresión que minimiza la variación de la acción se obtiene la fórmula de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (14.9)$$

para obtener las ecuaciones de gobierno del problema físico (por ej. ecuaciones del movimiento, eléctricas, electromecánicas...). Para los casos en que hay fuerzas no conservativas, disipadoras de energía, la expresión (14.9) no es homogénea y el término derecho debe incluir la sumatoria de fuerzas no conservativas y no potenciales [Wel72, Cap. 6].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{\text{no potencial}} \quad i = 1, \dots, n \quad (14.10)$$

Matemáticamente, la fórmula de Lagrange resuelve un problema de hallar el extremo de un funcional y físicamente permite obtener las ecuaciones de evolución del sistema dinámico.

14.5.1 Ejemplo mecánico

Para un péndulo simple de longitud l y masa m definido por $(q; \dot{q}) = (\theta; \dot{\theta})$, mostrado en la Figura 14.3, se determinan las expresiones de la energía cinética y potencial, de modo de construir el Lagrangiano

$$\begin{aligned} T(\dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 \\ V(\theta) &= -mgl \cos(\theta) \\ L(\theta, \dot{\theta}) &= T - V = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + mgl \cos(\theta) \end{aligned}$$

Se calculan las derivadas parciales y temporales

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin(\theta) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \end{cases} \quad (14.11)$$

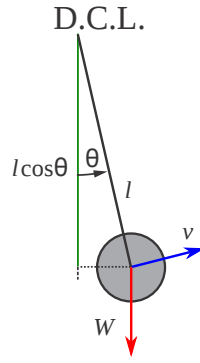


Figura 14.3: Diagrama de cuerpo libre de un péndulo simple.

a ser reemplazadas en la fórmula de Lagrange (14.9) para obtener las ecuaciones del movimiento

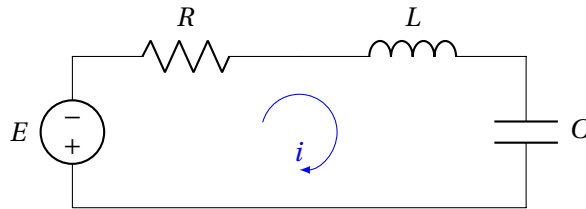
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

que coinciden con las que ya obtuvimos y sabemos como resolverla.

El método de Lagrange es un método sistemático muy conveniente aún en casos muy complejos. Los pasos son elegir las variables de estado, construir las expresiones de las energías y el Lagrangiano, realizar las derivadas parciales que exige la fórmula. A continuación vemos un ejemplo del dominio eléctrico con disipación.

14.5.2 Ejemplo eléctrico

Figura 14.4: Circuito RLC con fuente de tensión con valor constante E .

En el circuito RLC serie provisto de una fuente de tensión constante de valor E , suministrando una energía $V = Eq$, es posible obtener las ecuaciones de la dinámica partiendo también de un Lagrangiano eléctrico, calculado como la diferencia entre la energía magnética en el inductor (que es el almacenador de energía magnética) y de la energía potencial compuesta por la acumulada en el capacitor y la potencial de la fuente ($V_{fuente} = -Eq$)

$$L_E = T_E - V_E = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 - Eq\right) \quad (14.12)$$

Se calculan las derivadas parciales y temporales

$$\begin{cases} \frac{\partial L_E}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_E}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q} \\ \frac{\partial L_E}{\partial q} = -\frac{q}{C} + E \end{cases} \quad (14.13)$$

a ser reemplazadas en la fórmula de Lagrange (14.9) no homogénea, es decir, igualada a $Q_{\text{no potencial}} = -R\dot{q}$, para obtener las ecuaciones de la dinámica

$$L\ddot{q} - \left(-\frac{q}{C}\right) = E - R\dot{q}$$

$$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E}$$

cuyo lado izquierdo es el mismo que el visto para el circuito RLC de corriente alterna.

14.6 Modelado de sistemas electromecánicos

Los sistemas electromecánicos están destinados a convertir energía eléctrica en mecánica y viceversa. Para obtener sus ecuaciones de gobierno podemos recurrir al método de Lagrange o bien utilizar otros postulados conocidos, por ejemplo la Leyes de Kirchoff combinadas con la Leyes de Newton.

Los dispositivos electromecánicos más utilizados en la industria y en el hogar son los motores y los generadores eléctricos, de corriente continua o alterna. Estos dispositivos se basan en las leyes del electromagnetismo postuladas por Faraday y Lenz.

14.6.1 Motor de corriente continua

El motor de corriente continua (CC) es un dispositivo que convierte energía eléctrica en energía mecánica. El motor de CC se caracteriza por su alto torque de arranque y por la simplicidad de su control, por ello se lo utiliza como motor de tracción en vehículos eléctricos y locomotoras eléctricas. Constructivamente, la mayoría consta de un rotor con un devanado de armadura, cumpliendo el rol del inducido, y de un estator que es el inductor o campo, que en general está devanado (o bien puede estar compuesto de imanes permanentes en el caso de dispositivos muy pequeños como juguetes y afeitadoras). El circuito de armadura requiere de la conexión con el devanado del rotor, el cual se conecta a dos anillos rotantes sobre los que rozan escobillas¹ que cierran el circuito. En el motor de CC como el mostrado en la Figura 14.5, se identifican claramente el circuito de armadura y el del campo. Esto conduce a dos formas de control:

1. Control por armadura: Se mantiene fija la corriente del campo inductor, $i_c = \text{cte}$, manteniendo un campo inductor constante (en muchos casos el inductor es un imán permanente), y se varía la corriente en el circuito inducido o armadura i_a .
2. Control por campo: Se mantiene fija la corriente en el circuito inducido, $i_a = \text{cte}$, y se varía la corriente del campo inductor i_c .

Cuando circula corriente por el inducido, las interacción entre las fuerzas magnéticas del campo del estator y el devanado de armadura, hacen que aparezcan pares de fuerzas de acción y reacción entre rotor y estator, produciendo un par motor. En el motor, el par motor M acelera el rotor venciendo las resistencias al movimiento $M_a = b_\theta \omega$ y adquiriendo un momento efectivo $M_{ef} = I\dot{\omega}$ hasta llegar a una velocidad de régimen en que ambos, par motor y resistencias, se equilibran

$$M - M_a = M_{ef} \quad \rightarrow \quad K i_a - b_\theta \omega = I \dot{\omega} \quad \text{ó} \quad K i_c - b_\theta \omega = I \dot{\omega} \quad (14.14)$$

El par motor M es proporcional a la corriente de armadura o a la corriente del campo, según corresponda al controlador.

El modelado matemático para ambas posibilidades de control consistirá de las ecuaciones diferenciales que modelan su circuito eléctrico en forma «acoplada» con las ecuaciones diferenciales del cuerpo rotante a mover.

Al girar el inducido, sus devanados cortan el campo magnético inductor, generando una contra-tensión también denominada fuerza contraelectromotriz, $e(t) = f.c.e.m.$, que se opone al paso de la corriente (Ley de Lenz) y a la tensión aplicada. Esta tensión debida a la inducción electromagnética

¹Actualmente, están muy difundidos los motores sin escobillas (brushless) que requieren de un campo rotante generado electrónicamente (donde la velocidad se controla por modulación de ancho de pulso de una señal) sobre el estator y de un rotor de imanes permanentes; el concepto inverso o generador está muy vigente para los aerogeneradores eólicos.

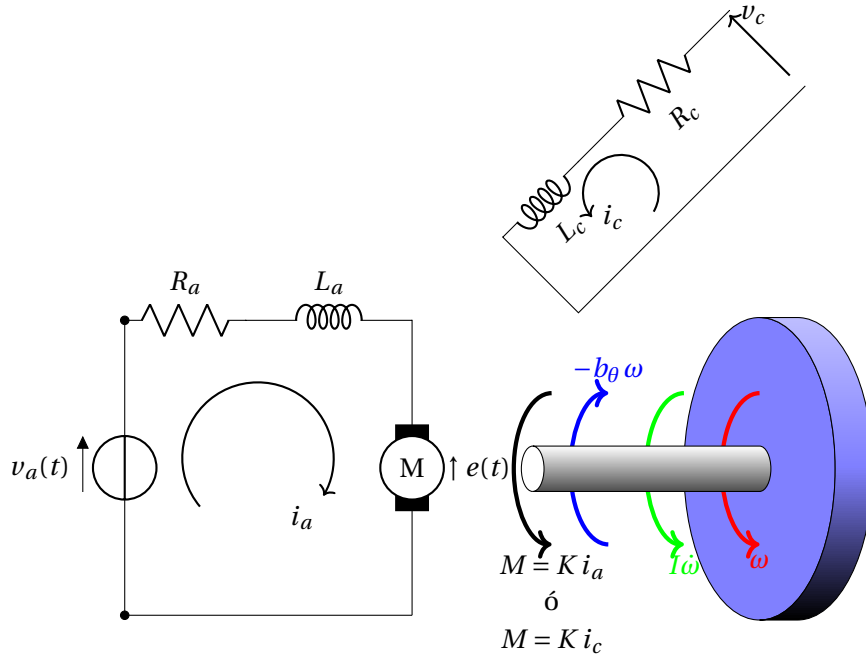


Figura 14.5: Esquema del circuito eléctrico de armadura (a la izquierda), del circuito del campo para la excitación independiente (dibujado inclinado) y de la carga mecánica que se acopla al rotor del motor eléctrico.

depende de las características constructivas del motor, del campo magnético B del inductor (si es bobinado depende de la intensidad de corriente i_c del circuito del campo inductor) y de la velocidad de giro ω

$$e(t) = K_E \omega(t) \quad (14.15)$$

y en el motor genera un torque o momento

$$M(t) = K_M i_a(t) \quad (14.16)$$

donde las constantes K_E y K_M en general no coinciden y sus valores dependen del sistema de unidades elegido.

Para deducir estas dos ecuaciones, primero se determina la fuerza que se genera en un conductor de longitud L en el cual circula una corriente i_a y corta perpendicularmente a un campo magnético con densidad de flujo magnético B

$$F^{(1)} = B L i_a \quad (14.17)$$

en donde si hubiese N espiras, la fuerza es

$$F^{(N)} = N B L i_a \quad (14.18)$$

donde B es el flujo Φ por unidad de área, que en un rotor se calcula como el área del rotor dividido por el número p de pares de polos $A = \frac{2\pi r L}{p}$. Luego, la densidad de flujo magnético se calcula como

$$B = \frac{\Phi p}{2\pi r L} \quad (14.19)$$

que sustituida en la fuerza resulta

$$F^{(N)} = N \left(\frac{\Phi p}{2\pi r L} \right) L i_a \rightarrow F = N \frac{\Phi p}{2\pi r} i_a \quad (14.20)$$

Estas fuerzas aparecen de a pares en espiras separadas por una distancia r , produciendo el momento

$$M = F r = \left(N \frac{\Phi p}{2\pi r} i_a \right) r \rightarrow M = N \frac{\Phi p}{2\pi} i_a = K_M i_a \quad (14.21)$$

que demuestra la expresión (14.16) y es utilizada en (14.14). Nótese que si la corriente de armadura se mantiene constante, $i_a = \text{cte}$ el campo inductor puede variarse $\Phi(i_c)$ con la corriente del circuito de campo y el momento sería función de dicha corriente.

Con un desarrollo similar, se obtiene la f.e.m que se produce cuando la espira se mueve en el campo B y es proporcional a su longitud L y la velocidad de traslación perpendicular al campo es $v = \omega r$, esta tensión se multiplica por el número de espiras N

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= B L v = B L \omega r \\ e^{(N)} &= N e^{(1)} = N B L \omega r \end{aligned} \quad (14.22)$$

reemplazando la expresión (14.19) de la densidad de flujo B se obtiene

$$e(t) = N \left(\frac{\Phi p}{2\pi r L} \right) L \omega r = N \frac{\Phi p}{2\pi} \omega = K_E \omega \quad (14.23)$$

se demuestra (14.15).

Por la 2da Ley de Kirchoff, las caídas de tensión en el circuito de armadura son

$$\begin{aligned} v_a(t) - v_L - v_R - e(t) &= 0 \\ v_a(t) - L \frac{di_a}{dt} - R_a i_a - K_E \omega &= 0 \\ L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_E \omega &= v_a(t) \end{aligned} \quad (14.24)$$

entonces para el control por armadura las ecuaciones de gobierno del comportamiento electromecánico son

$$\begin{cases} v_a(t) - K_E \omega = L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \\ I \dot{\omega} = K i_a - b_\theta \omega \end{cases} \quad \text{s.a. C.I.,} \quad B = \text{cte}; v_c = \text{cte}; i_c = \text{cte} \quad (14.25)$$

donde v_a es la variable de entrada y $e = K_E \omega$ es una realimentación dependiente de la variable de salida ω , la diferencia $v_a - e$ es una señal de error que se incorpora en el circuito de armadura resultando en una corriente i_a que genera un momento $M = K i_a$ sobre la carga, a este momento se le restan las resistencias $-b_\theta \omega$ y vencerá la inercia de la carga para producir una velocidad resultante ω . En régimen, $\dot{i}_a = 0$ y $\dot{\omega} = 0$ de modo que i_a y ω son constantes. En el transitorio de arranque la corriente puede ser alta y debe limitarse adecuadamente.

Para el caso de control por campo, la ecuación eléctrica es la 2da ley de Kirchoff para el circuito de campo, la cual no está afectada por el f.c.e.m.

$$\begin{cases} v_c(t) = L \frac{di_c}{dt} + R_c i_c \\ I \dot{\omega} = K i_c - b_\theta \omega \end{cases} \quad \text{s.a. C.I.,} \quad i_a = \text{cte} \quad (M = k' B i_a = K i_c) \quad (14.26)$$

En una condición bajo carga, las ecuaciones eléctricas no se modifican. Sin embargo, en las ecuaciones mecánicas de (14.25) y (14.26) habrá que considerar el momento de inercia I_L de la carga (y eventualmente el del acople) que se debe sumar al del rotor, el momento constante M_L de la carga a vencer y algún momento de fricción M_f que aparezca

$$(I + I_L) \dot{\omega} = K i_c - b_\theta \omega - M_L - M_f \quad (14.27)$$

Cabe mencionar que la descripción constructiva del motor y de su operación es más compleja. Entre ellos, no se han mencionado las diferentes formas de conectar los devanados de armadura y de campo, los solenoides de corrección de desviación de campo magnético, las curvas de torque en función de la velocidad y la corriente en cada caso, etc. El conocimiento de estos detalles exige un curso específico de Máquinas Eléctricas.

Estas ecuaciones que se presentaron se pueden resolver convenientemente en forma analítica o utilizando simulación numérica en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia, es decir, utilizando el Método de Laplace.

Nota para los alumnos

En Matlab® se pueden programar estas ecuaciones y simularlas utilizando paquetes de ODEs en el dominio del tiempo y para el dominio de la frecuencia posee muchas herramientas desarrolladas en Simulink® que permiten diseñar, analizar y compensar sistemas de control, que se estudiarán en profundidad en la materia de Control Automático. En Matlab existe un toolbox específico SimPowerSystems® en donde el motor eléctrico ya tiene su construcción en bloques; usarán estas herramientas en la materia de Sistemas de Potencia junto con otros programas de simulación de redes eléctricas como PSS/E® de Siemens y PowerWorld®. En propósito de esta materia es que apliquen correctamente los conocimientos de mecánica cuando estos conceptos estén incluidos o sean datos de entrada necesarios.

14.7 Modelado de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos pueden modelarse utilizando muchos enfoques. Un enfoque holístico utilizando la teoría general de sistemas es a veces demasiado general. En ingeniería, tanto para analizar problemas simples como complejos, es conveniente utilizar un modelado basado en transferencias y conversiones de energía y en separar el problema en dominios: eléctrico, mecánico (térmico, hidráulico, acústico), biológico, social, económico, etc. Entre los dominios existen analogías entre variables, parámetros y comportamientos que facilitan el predecir cómo se va a comportar un sistema dado cierto modelo y condiciones iniciales.

Una simplificación que permite analizar problemas difíciles y acoplados es tener en cuenta sistemas dinámicos con elementos con relaciones constitutivas lineales (siempre dependiendo del problema en mano, un grado de complejidad mayor y más realista es considerar sistemas no lineales y, aún mejorado, considerar algunas variables aleatorias). Para facilitar el manejo de sistemas dinámicos complejos se han desarrollado métodos gráficos: el típico diagrama en bloques basado en señales, el método basado en enlaces de potencias o diagrama de enlaces (Bond Graphs), y actualmente, un nivel con menos abstracción, existen métodos basados en componentes y subsistemas. En el diagrama en bloques, la señal puede ser unidimensional o compuesta de múltiples variables de estado o intermedias. En el diagrama de enlaces, la señal es bidireccional y conduce en un sentido el esfuerzo y en el otro el flujo, la flecha indica el sentido de flujo de la potencia y un trazo transversal indica hacia donde va el esfuerzo o bien desde donde parte el flujo, específicamente, expresa la relación entre causa y efecto.

En los sistemas dinámicos energéticos, se utilizan símbolos generalizados que representan 4 variables de los sistemas. Primero, se distinguen las *variables de potencia*

- $e(t)$: *esfuerzo* generalizado
- $f(t)$: *flujo* generalizado

en donde el producto del esfuerzo y el flujo es una potencia. Relacionadas a cada variable de potencia, están las *variables de energía*

- $p(t)$: *momentum o impulso* generalizado
- $q(t)$: *desplazamiento o carga* generalizada

de modo que el momentum es la acumulación de potencia en el tiempo y la carga es la acumulación de flujo en el tiempo. Entonces la energía admite dos representaciones, una en términos del momentum y otra en términos del desplazamiento

$$E(t) = \int (\text{Potencia}) dt = \int e(t)f(t)dt = \underbrace{\int e(q)dq(t)}_{E(q)} = \underbrace{\int f(p)dp(t)}_{E(p)}. \quad (14.28)$$

Una decisión importante en un modelo físico es elegir las *variable de estado*. Estas variables definen la configuración física en el estado actual y a través del modelo matemático deben permitir obtener, por cálculo, el estado siguiente. Como regla es conveniente elegir las variables de energía sobre los elementos activos almacenadores de energía (por ejemplo, masas e inercias, inductores, etc.) y pueden ser variables de carga o flujo.

En la Tabla 14.2 siguiente se muestran las variables generalizadas para diferentes dominios.

También se definen símbolos generalizados para los parámetros usados en las leyes constitutivas de elementos, es decir, para definir las leyes entre las variables generalizadas:

- I : *inertancia* generalizada
- R : *resistencia* generalizada
- C : *compliance* generalizada

Como ejemplo de diferentes dominios, se presentan las constantes en la Tabla 14.3.

Las ecuaciones de la física que se pueden obtener con estas variables y operando en forma integral o multiplicando por constantes de elementos, según se expresa en el *tetrahedro de estado* mostrado en la Figura (14.6).

Tabla 14.2: Variables generalizadas, símbolos y unidades en el S.I. para varios dominios

		Variable generalizada			
		Variables de potencia		Variables de energía	
Dominio		Esfuerzo $e(t)$	Flujo $f(t)$	Momentum $p(t)$	Carga $q(t)$
Mecánico	Traslación	Fuerza	Velocidad lineal	Momentum lineal	Desplazamiento lineal
		$F(t)$	$v(t)$	$p(t)$	$x(t)$
		N	m/s	Ns	m
	Rotación	Momento	Velocidad angular	Momentum angular	Desplazamiento angular
		$M(t)$	$\omega(t)$	$H(t)$	$\theta(t)$
		N.m	rad/s	N.m.s	rad
Eléctrico		Voltaje	Corriente	Vínculo de flujo	Carga
		$v(t)$	$i(t)$	$\lambda(t)$	$q(t)$
		V	A	V.s	C
Hidráulico		Presión	Caudal volumétrico	Momentum de fluido	Volumen
		$P(t)$	$\varphi(t)$	$p_f(t)$	$V(t)$
		Pa	m ³ /s	Pa.s	m ³

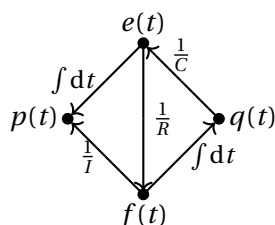


Figura 14.6: Tetrahedro de estado permite obtener, siguiendo las flechas, las expresiones generalizadas entre flujo, esfuerzo, carga y momentum generalizados; se debe integrar o multiplicar por la constante de la flecha.

Tabla 14.3: Constantes generalizadas, símbolos y unidades en el S.I. para varios dominios

		Constante generalizada		
Dominio		Resistencia R	Inercia I	Flexibilidad C
Mecánico	Traslación	Constante de amortiguamiento	Masa	Inversa de la constante de rigidez del resorte
		b	m	$\frac{1}{k}$
		N · s/m	kg	m/N
	Rotación	Amortiguamiento Angular	Momento de inercia de masa	Inverso de la constante de rigidez del resorte angular
		b_θ	I	$\frac{1}{k_\theta}$
		(N · m · s)/rad	kg · m ²	1/(N · m)
Eléctrico		Resistencia	Inductancia	Capacitancia
		R	L	C
		Ω	H	F
Hidráulico		Resistencia del fluido	Inductancia del fluido	Capacidad de almacenamiento
		R_f	I_f	C_f
		Pa · s/m ³	Pa · s ² /m ³	m ³ /Pa

14.7.1 Modelado con Diagramas de Enlaces

Los diagramas de enlaces, como ya se mencionó, consisten de un medio gráfico de representar un sistema dinámico en donde cada enlace (i) representa el flujo de potencia dentro de un sistema y (ii) transmite dos variables, el esfuerzo en un sentido y el flujo en el otro. El conjunto de elementos básicos con patrón común es pequeño (**R**, **C**, **I**, **Se**, **Sf**, **TF**, **GY**, **0**, **1**) de los cuales, (**R**, **C**, **I**, **Se**, **Sf**) son de un puerto, (**TF**, **GY**) son de dos puertos, y (**0**, **1**) son multipuertos. El modelado con estos diagramas ha avanzado mucho y se han propuesto elementos particulares que no describiremos aquí. Básicamente, las definiciones en las que se basa el método son las siguientes:

1. **Causalidad:** Es la relación causa-efecto. Si las *causas de un evento pasado* son integradas para producir un *efecto presente*, la causalidad es integral. Si la diferenciación de la *causa en el evento presente* determina un *efecto del futuro*, la causalidad es diferencial. Ya que el pasado se conoce mejor que el presente, la causalidad integral es la preferida para elementos que almacenan energía. Gráficamente se presenta como una barra transversal cruzada al inicio o fin de la flecha, indica a dónde se dirige el esfuerzo o de dónde parte el flujo.
2. **Fuentes:** Son elementos de 1 puerto para proveer de esfuerzo o flujo constante al sistema. Es una fuente ideal.
 - Fuente de esfuerzo **Se**: Provee de potencia al sistema de modo tal que el esfuerzo es constante y el flujo varía con la carga del sistema. Ejs. Baterías o fuentes de voltaje, fuerza gravitacional, etc.
 - Fuente de flujo **Sf**: Provee de potencia al sistema de modo tal que el flujo es constante y el esfuerzo varía con la carga del sistema. Ejs. Fuentes de corriente constante, fluido provisto por una bomba, etc.

Gráficamente las flechas se alejan de los elementos **Se** ó **Sf**, la potencia fluye en la dirección de la flecha hacia el sistema.

3. **Unión de energía 0 y 1:** La unión de energía expresa la conservación de la energía, es decir, la energía que entra a la unión debe ser igual a la que sale. En términos de potencia debe ocurrir lo mismo, por ejemplo, si las potencias $P_1 = e_1 f_1$ y $P_3 = e_3 f_3$ ingresan a una unión y sale $P_2 = e_2 f_2$,

la conservación de la energía en un diferencial de tiempo indica que

$$P_1 + P_3 = P_2 \quad (14.29)$$

$$e_1 f_1 + e_3 f_3 = e_2 f_2 \quad (14.30)$$

de aquí surgen dos posibilidades,

- Unión de esfuerzo o “unión 1”: el flujo es el mismo $f_1 = f_2 = f_3 = f$ y en

$$e_1 f_1 + e_3 f_3 = e_2 f_2$$

$$f(e_1 + e_3) = f e_2$$

se obtiene

$$e_1 + e_3 = e_2 \quad f_1 = f_2 = f_3 \quad (14.31)$$

y generalizando

$$\boxed{f_i = f \quad \sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad i = 1, \dots, n} \quad (14.32)$$

- Unión de flujo o “unión 0”: el esfuerzo es el mismo $e_1 = e_2 = e_3 = e$ y en

$$e_1 f_1 + e_3 f_3 = e_2 f_2$$

$$e(f_1 + f_3) = e f_2$$

se obtiene

$$f_1 + f_3 = f_2 \quad e_1 = e_2 = e_3 \quad (14.33)$$

y generalizando

$$\boxed{e_i = e \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad i = 1, \dots, n} \quad (14.34)$$

Claramente, para el caso eléctrico en que el esfuerzo es la tensión y el flujo es la corriente, estas uniones expresan las leyes de Kirchhoff para voltajes y corrientes, más conocidas como LKV y LCK, o como ley de mallas y ley de nodos, respectivamente.

4. **Acumulador:** Es un elemento de 1 puerto en donde se almacena y libera energía; puede consistir de un elemento inductivo (energía cinética/magnética) o un elemento capacitivo (energía potencial/campo eléctrico). Ambos tienen diferentes ecuaciones constitutivas y se considera que no disipan energía. El inductor relaciona momentum y variables de flujo, $p(t) = I f(t)$ y $f(t) = \frac{1}{I} p(t)$. El capacitor relaciona esfuerzo y variable de carga (desplazamiento), $e(t) = \frac{1}{C} q(t)$ y $q(t) = C e(t)$. La flecha del enlace apunta hacia el elemento **C** ó **I**.
5. **Disipador:** Es un elemento de 1 puerto resistivo **R** en donde se disipa energía, principalmente en forma de calor o fricción. Como su relación constitutiva, $e(t) = R f(t)$, es algebraica, no es ni diferencial ni integral, su causalidad es arbitraria, la flecha va dirigida hacia el símbolo **R** pero la barra de causalidad puede ir en cualquier extremo (a los fines de deducir las ecuaciones).
6. **Transformadores:** Transmiten la potencia de un lado al otro, (idealmente) no la almacenan ni la disipan. Las ecuaciones constitutivas que relaciona el esfuerzo y flujo de entrada con el esfuerzo y el flujo de salida, respectivamente son $e_2(t) = N e_1(t)$ y $f_1(t) = N f_2(t)$, donde claramente $e_1 f_1 = \left(\frac{e_2}{N}\right) (N f_2) = e_2 f_2$. Son ejemplos (ideales sin considerar rozamientos ni pérdidas), el transformador eléctrico, la transmisión por engranajes, el subibaja, la palanca mecánica, la bomba hidráulica de lóbulos, y hay muchos otros.
7. **Transductores:** Es un elemento de dos puertos que no es ni actuador ni sensor, es un transductor de potencia entre dos dominios (por ejemplo, el eléctrico y el mecánico en un motor de CC), recibe una variable de *esfuerzo y flujo*, $e_1(t)$ y $f_1(t)$, como entrada en un dominio (eléctrico: voltaje de entrada) y entrega una variable de *esfuerzo y flujo*, $e_2(t)$ y $f_2(t)$, como salida en otro dominio (mecánica: velocidad angular de salida) en donde la variable de esfuerzo de un dominio se relaciona linealmente con la de flujo del otro y viceversa, es decir, $e_2(t) = M f_1(t)$ y $e_1(t) = M f_2(t)$. Al elemento se lo denomina *girador* y se lo simboliza con **GY** por *gyrator*. Otro ejemplo es el transductor piezoeléctrico velocidad de deformación de entrada en voltaje salida. En los simuladores de Bond Graphs (por ejemplo, 20Sim [van12] o en Simscape de Matlab) el motor eléctrico viene provisto como bloque predefinido.

Cabe destacar que la primera aplicación de los Bond Graphs desarrollada por Henry Paynter [Pay00], surgió de analizar la analogía eléctrica, mecánica, e hidráulica y se utilizó para simular la generación hidroeléctrica partiendo de la energía de una represa de agua; ver Figura 14.7. Paynter identifica la analogía en *transmisión* (flujo de fluido en tuberías y flujo de corriente eléctrica), en *transducción* (la turbina transforma flujo de agua en movimiento mecánico de un eje mientras que el generador eléctrico transforma la energía mecánica del eje en corriente eléctrica alterna polifásica) y en el *control* (los reguladores de velocidad de la turbina son análogos a los reguladores de voltaje del generador).

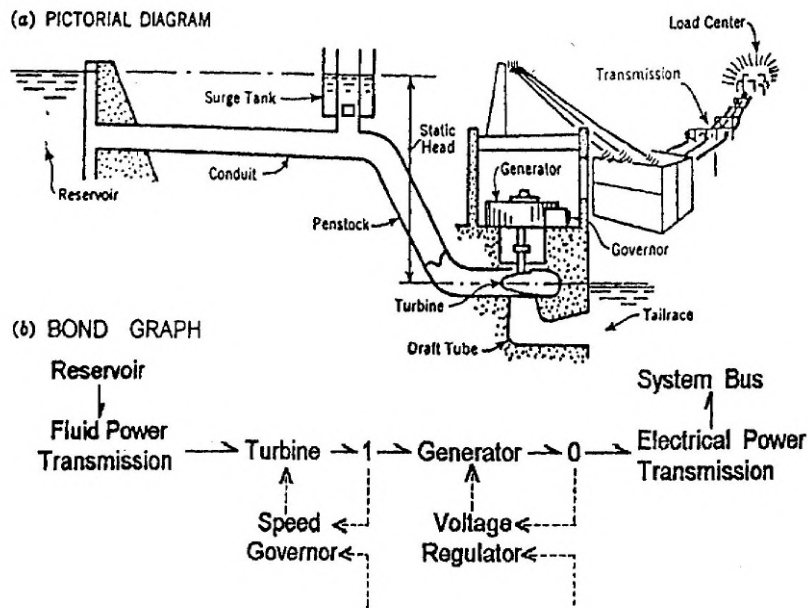


Figura 14.7: Aplicación de Bond Graphs al modelado de una planta hidroeléctrica por H. M. Paynter, 1961 [Pay00]: (a) Esquema físico; (b) Diagrama de Bond Graphs.

Para un diagrama de BG, sólo si es consistente con ciertas reglas de causalidad y convenciones, existe un algoritmo que permite establecer las ecuaciones de la dinámica o ecuaciones de estado. Luego, se resuelven computacionalmente y se puede analizar la respuesta para una entrada dada.

Para mostrar un ejemplo simple de un diagrama de enlace reutilizaremos el motor de corriente continua con control por corriente de armadura, como se muestra en la Figura 14.8.

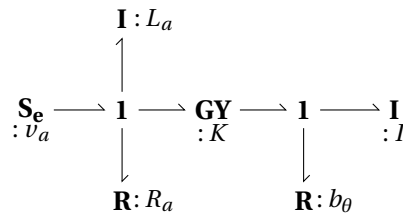


Figura 14.8: Diagrama de Bond Graphs de un motor de corriente continua.

Si al motor de CC le adosamos una carga con una caja reductora por engranajes de relación $n : 1$, momento de inercia de la carga I_c y coeficiente de amortiguamiento a la rotación $b_{\theta c}$, el diagrama de la Figura 14.8 se modifica como muestra la Figura 14.9. Nótese la simplicidad del diagrama al agregar objetos desde una pequeña cantidad de elementos (**R**, **C**, **I**, **Se**, **Sf**, **TF**, **GY**, **0**, **1**).

Para obtener las expresiones de la ecuaciones se siguen pasos que consideran las leyes de la física generalizadas.

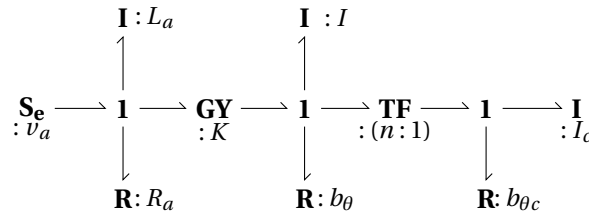


Figura 14.9: Diagrama de Bond Graphs de un motor de corriente continua con carga.

1. Asignación de causalidad: Se analiza la causa y el efecto (en lo cual pueden encontrarse conflictos) asignando la causalidad dictada por las leyes de la física en el siguiente orden: necesaria (**Se** y **Sf**), restringida (**TF**, **GY**, **0**, **1**), preferencial (**I**, **C**), arbitraria (**R**). Luego de cada asignación se deben evaluar todas las formas de propagarla a los otros elementos vecinos. Puede haber más de una asignación factible.
2. Se enumeran los enlaces (consiguientemente la variable de esfuerzo y flujo tendrá el índice del enlace).
3. Se identifican las variables de estado (de preferencia las variables de energía en almacenadores).
4. Se leen las ecuaciones asociadas a los enlaces siguiendo la causalidad y utilizando las leyes de los componentes y sus ecuaciones constitutivas.

Esto es analizado automáticamente en el código de un software pero puede hacerse manualmente siguiendo el algoritmo. Por ejemplo, utilizamos el motor de CC sin carga de la Figura 14.8 [Das09, p.157]. Los dos primeros pasos se identifican en la Figura 14.10

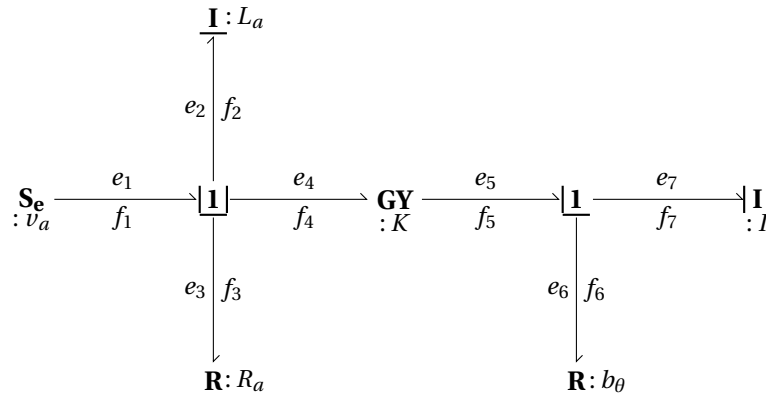


Figura 14.10: Diagrama de Bond Graphs de un motor de corriente continua con causalidades indicadas (en las barras transversales) y con enlaces numerados en variables de esfuerzo y flujo.

Luego, se eligen como variables de estado a las variables de energía p_2 y p_7 .

1. $e_1 = v_a(t)$ en la fuente **Se**
2. $e_1 = e_2 + e_3 + e_4$ en la primera unión **1**
3. $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$ idem
4. $e_3 = R_a f_3$ en la resistencia **R**
5. $f_2 = \frac{1}{L_a} \int e_2 dt = \frac{p_2}{L_a}$ en el inductor **I**
6. $e_5 = K f_4$ en el **GY**
7. $e_4 = K f_5$ idem
8. $e_5 = e_6 + e_7$ en la segunda unión **1**
9. $f_5 = f_6 = f_7$ idem
10. $e_6 = b_\theta f_6$ en la resistencia rotacional **R**
11. $f_7 = \frac{1}{J} \int e_7 dt = \frac{p_7}{J}$ en la inercia rotacional **I**

Claramente podemos ahora clasificar lo que devuelve cada elemento al sistema

- $e_1 = v_a(t)$
- $e_3 = R_a f_3$
- $f_2 = \frac{p_2}{L_a}$
- $e_5 = K f_4$
- $e_4 = K f_5$
- $e_6 = b_\theta f_6$
- $f_7 = \frac{p_7}{I}$

y combinarlo con las ecuaciones de unión de energía (conservación) para enunciar las dos ecuaciones de estado en el enlace 2 y 6. Para el enlace 2 se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_2 &= e_2 \\
 &= \underbrace{e_1}_{(1)} - \underbrace{e_3}_{(4)} - \underbrace{e_4}_{(7)} \\
 &= v_a(t) - R_a \underbrace{f_3}_{(3)y(5)} - K \underbrace{f_5}_{(9)y(11)} \\
 &= v_a(t) - R_a \frac{p_2}{L_a} - K \frac{p_7}{I}
 \end{aligned}$$

Para el enlace 7 se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_7 &= e_7 \\
 &= \underbrace{e_5}_{(6)} - \underbrace{e_6}_{(10)} \\
 &= K \underbrace{f_4}_{(3)y(5)} - b_\theta \underbrace{f_6}_{(9)y(11)} \\
 &= K \frac{p_2}{L_a} - b_\theta \frac{p_7}{I}
 \end{aligned}$$

Finalmente estas dos ecuaciones de estado se pueden escribir como el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = v_a(t) - R_a \frac{p_2}{L_a} - K \frac{p_7}{I} \\ \dot{p}_7 = K \frac{p_2}{L_a} - b_\theta \frac{p_7}{I} \end{cases} \quad (14.35)$$

que son similares a las ecuaciones obtenidas para el motor de CC que ya hemos descrito, aunque para facilitar la comparación con las ecuaciones vistas en las ecuaciones (14.25), debemos considerar que los impulsos adquieren los valores $p_2 = L_a i_a$ y $p_7 = I \omega$, éstos deben reemplazarse en el lado derecho de las ecuaciones (14.35) y sus derivadas en el lado izquierdo.

La expresión en variables de estado también puede escribirse en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (14.36)$$

de modo que ordenando las variables de estado y sus derivadas en los vectores $\mathbf{x}(t)$ y $\dot{\mathbf{x}}(t)$ respectivamente, el vector de entradas en el vector $\mathbf{u}(t)$ y las constantes matrices cuadradas constantes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. De este modo, las ecuaciones del motor resultan

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{p}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{I} \\ \frac{K}{L_a} & -\frac{b_\theta}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_2 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14.37)$$

Existen muchos algoritmos y métodos numéricos para resolver la ecuación de la *forma de espacio de estado* e incluso permite realizar análisis detallados de su estabilidad utilizando teoremas avanzados de álgebra lineal. Para completar la información acerca de sistemas lineales, la salida *observada o medible* $\mathbf{y}(t)$ de un sistema no siempre coincide con las variables de estado y en una primer forma simplificada se puede asumir que depende linealmente de las variables de estado $\mathbf{x}(t)$ y de las entradas

de control $u(t)$. Luego, a la ecuación del modelo se le debe adicionar otra ecuación de *salida* o de *observación*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (14.38)$$

Estas ecuaciones modelan a sistemas lineales con coeficientes invariantes en el tiempo y son objeto de estudio en problemas de control avanzado. El propósito de presentar esta ecuación aquí, algo compleja para un alumno de 2do año, es conocer que nuestro modelado dinámico (conocido como modelado de la planta y que permite conocer cómo evoluciona el sistema en el tiempo) forma parte de un sistema más amplio de ecuaciones que abarca a su sistema de control, es decir, del modelo que nos permite diseñar el comportamiento deseado o especificado del sistema.

14.7.2 Modelado con dominio en frecuencia

La Transformada de Laplace permite convertir ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes (en el dominio del tiempo t) en expresiones algebraicas en el dominio de la frecuencia (en una variable compleja s). El método pertenece a los llamados métodos operacionales basados en transformaciones integrales de funciones y distribuciones. Dada una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, al aplicar el *operador* $\mathcal{L}$ se obtiene la transformada de Laplace $F(s)$ calculada mediante la integral

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14.39)$$

Las expresiones transformadas en muchos casos se reducen fácilmente mediante operaciones de álgebra de polinomios buscando expresiones mínimas para la relación entre la transformada de la entrada y la transformada de la salida. Dicha expresión es la función de transferencia, la cual multiplicada por la transformada de la salida permite obtener la función de entrada. La expresión final de este producto puede antitransformarse utilizando la integral

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (14.40)$$

y volver al dominio del tiempo, hallando así la expresión analítica de la respuesta en función de las entradas para todo tiempo. Usualmente los ingenieros llevan a las expresiones en el dominio en frecuencia a formas simples cuyas antitransformadas están tabuladas y se evita el cálculo de estas complejas integrales. El método permite resolver ecuaciones de la dinámica del sistema físico, pero además, permite analizar la estabilidad y diseñar sistemas para que sean estables (compensar). La habilidad de analizar dichas gráficas de estabilidad es de gran utilidad para los ingenieros. Todos estos conceptos serán dictados en profundidad en la materia Control Automático del cuarto nivel.

En el motor de corriente continua se debe transformar la ecuación eléctrica y la mecánica para luego y vincular la entrada (voltaje de armadura) con la salida (velocidad angular del motor). Dadas las ecuaciones diferenciales del motor

$$\begin{cases} v_a(t) - K\omega = L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \\ J \dot{\omega} = K i_a - b_\theta \omega \end{cases} \quad (14.41)$$

la transformada de Laplace resulta en

$$\begin{cases} V_a(s) - K\Omega(s) = L s(I_a(s) - i_a(0)) + R_a I_a(s) \\ J s(\Omega(s) - \omega(0)) = K I_a(s) - b_\theta \Omega(s) \end{cases} \quad (14.42)$$

asumiendo las condiciones iniciales $i_a(0) = 0$ y $\omega(0) = 0$, se despeja la transformada de la corriente de armadura de la ecuación mecánica

$$I_a(s) = \frac{(J s + b_\theta) \Omega(s)}{K}$$

y se la sustituye en la ecuación eléctrica para eliminarla

$$V_a(s) = (L s + R_a) I_a(s) + K \Omega(s)$$

quedando el voltaje de armadura de entrada como función de la velocidad angular de salida

$$V_a(s) = (Ls + R_a) \left(\frac{Js + b_\theta}{K} \right) \Omega(s) + K\Omega(s) = \frac{(Ls + R_a)(Js + b_\theta) + K^2}{K} \Omega(s)$$

luego de pasos algebraicos, la salida puede expresarse en función del voltaje de entrada como

$$\Omega(s) = \underbrace{\frac{K}{(Ls + R_a)(Js + b_\theta) + K^2}}_{\text{función transferencia}} V_a(s) \rightarrow \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{(Ls + R_a)(Js + b_\theta) + K^2}$$

Reemplazando las constantes por sus valores se puede antitransformar esta expresión para obtener $\omega(t)$ como función de $v_a(t)$ que es la función buscada. Además, se pueden obtener otras relaciones en el dominio de la frecuencia, operarlas algebraicamente y obtenerlas luego en el dominio del tiempo.

Del estudio de la función de transferencia se pueden determinar las constantes de tiempo mecánica $\tau_M = \frac{J}{b_\theta}$ y eléctrica $\tau_E = \frac{L}{R_a}$. La constante más lerd domina el comportamiento dinámico, se conoce que el sistema llega a régimen aproximadamente a 5τ . También se puede utilizar el teorema del valor final en el dominio de la frecuencia para conocer con exactitud el valor de régimen o estacionario de la salida (a tiempo infinito). Las expresiones en dominio de la frecuencia se pueden analizar en diagramas en bloques de Matlab Simulink.

Comentarios acerca de herramientas de simulación

En OpenModelica, que es de código abierto y tiene una interfaz de ingreso de datos denominada OMEditor, el esquema del motor eléctrico es un modelo ya provisto entre los ejemplos y tiene una interfaz gráfica para la carga de las constantes y especificaciones para la simulación. Otro programa libre que tiene orientación a ecuaciones y construcción por diagramas en bloques es Scicos de Scilab (INRIA, Francia) que utiliza el lenguaje ModelicaC.

El toolbox Simscape de Matlab permite una simulación entre múltiples dominios: eléctrico, magnético, electrónico, fluidos (hidráulico/neumático), mecánico, térmico, sistemas multicuerpo flexibles (ex-SimMechanics), sistemas eléctricos de potencia (ex-SimPowerSystems) y en especial sus combinaciones acopladas.

El software, Simcenter Amessim de Siemens, también comercial, tiene capacidades similares al Simscape y soporta comunicación con Matlab, Modelica y otros códigos.

Esta tendencia de simulación multidominio es sugerida por el avance tecnológico y la complejidad de los nuevos productos en el cual, la simulación por computadora, permite reducir costos en el tiempo de desarrollo y experimentación en los prototipos y diseños iniciales. Parte de la tendencia es utilizar representaciones gráficas sin tener que atender a las causalidades, es decir, que el software tenga un enfoque orientado a ecuaciones (bloques de subsistemas) y no a señales que deban seguir un determinado sentido de flujo. Esto puede verse en la evolución de Simulink a Simscape o en el empleo que hace Dymola con Modelica.

El autor considera que es importante estar actualizado en estas herramientas computacionales ya que los ingenieros de todo el mundo realizan análisis y diseño de sistemas por computadora.



Bibliografía

- [Ant01] H. Anton. *Introducción al álgebra lineal*. 5.^a edición. México: Limusa, 2001 (véase página 89).
- [BJC10] F. P. Beer, E. R. Johnston, Jr. y P. J. Cornwell. *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. 9.^a edición. Mexico: McGraw-Hill/Interamericana Editores, 2010 (véanse páginas 10, 21, 64, 77, 135).
- [Bil18] A.J. Bilstein. *Portal de trenes*. Sitio web <http://portaldetrenes.com.ar/>, accedido el 21-03-2018). 2018 (véase página 14).
- [Bol01] W. Bolton. *Mecatrónica : sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica*. 2.^a edición. México: Alfaomega, 2001 (véase página 135).
- [Cas14] J. Case. "Designers Fine-tune the Aerodynamics of World Cup Soccer Balls". En: *SIAM News* 5 (2014). <http://www.siam.org/pdf/news/2164.pdf>, página 8 (véase página 77).
- [Das09] S. Das. *Mechatronic modeling and simulation using bond graphs*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2009 (véase página 148).
- [Gal96] J. A. Gallian. *Mathematics and Sports*. USA: The Mathematical Association of America, 1996 (véase página 77).
- [Hib96] R.C. Hibbeler. *Ingeniería Mecánica: Dinámica*. 7.^a edición. México: Prentice Hall, 1996 (véanse páginas 77, 90).
- [LL94] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica : Volumen 1: Mecánica*. 2.^a edición. (Traducción por Eloísa López Vásquez desde la versión en ruso MEXAHNKA, 1965). Barcelona: Ed. Reverté, 1994 (véase página 138).
- [Mat18] Materfer. *Locomotora MTF 3300*. Sitio web <http://www.materfer.com/ferroviario/locomotora.php>, accedido el 21-03-2018). 2018 (véase página 14).
- [MK96] J. L. Meriam y L. G. Kraige. *Engineering Mechanics, Volume 2: Dynamics*. 7.^a edición. USA: John Wiley & Sons, 1996 (véase página 77).
- [Pay00] H. M. Paynter. *The Gestation and Birth of Bond Graphs*. online. (<http://www.me.utexas.edu/~longoria/paynter/hmp/Bondgraphs.html>, accedido 13/04/2018). 2000 (véase página 147).

- [Reu76] F. Reuleaux. *Kinematics of machinery*. (trans. and annotated by A. B. W. Kennedy), reprinted by Dover, New York (1963). London: Mcmillan y Co, 1876. URL: http://ebooks.library.cornell.edu/k/kmoddl/toc_reuleaux2.html (véase página 11).
- [Sol14] R. Solowey. *Mecánica Técnica para Estudiantes de Ingeniería Eléctrica*. Córdoba: Educo, 2014 (véase página 77).
- [van12] J. van Amerongen. *Dynamical Systems for Creative Technology*. 3.^a edición. (Ebook libre: Se solicita en <http://www.dynamicalsystems.nl/>). Enschede: Controllab Products B.V., 2012. ISBN: 978-90-79499-07-6 (véase página 146).
- [Wel72] Dare A. Wells. *Teoría y problemas de dinámica de Lagrange con un estudio de ecuaciones del movimiento de Euler, principio y ecuaciones de Hamilton*. Compendios Schaum. (Traducción de Francisco Gnecco Calvo de la primera edición en inglés de 1967). Colombia: McGraw Hill, 1972 (véase página 138).