

1: Generalidades

Espectro densidad de energía de una señal. Espectro densidad de potencia. Funciones de correlación para señales de energía. Funciones de correlación para señales de potencia. Relación entre correlación y convolución. Relación entre la autocorrelación y las señales de energía finita. Relación entre autocorrelación promedio y señales de potencia. De la incorrelación de señales.

1.1 Espectro densidad de energía de una señal

Es muy útil, trabajar con la energía normalizada de una señal $f(t)$. Esta se define para una resistencia normalizada de 1 Ohm, como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (1.1.1)$$

El concepto tiene validación como significativo, si la integral es finita, cuando esto ocurre a dichas señales se las llama de energía. Si $F(\omega)$, es la transformada de Fourier de la función, entonces:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.1.2)$$

reemplazando en 1.1, la energía queda

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (1.1.3)$$

intercambiando el orden de integración y operando

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \quad (1.1.4)$$

sabemos que

$$F(\omega) = F(-\omega) = [F(\omega)]^2 \quad (1.1.5)$$

reemplazando 1.1.5 en 1.1.4

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 df = 2 \int_0^{\infty} [F(\omega)]^2 df \quad (1.1.6)^1$$

¹ Esta expresión de manera generalizada se la conoce como el teorema de Parseval

definiendo a $[F(\omega)]^2$, como el espectro densidad de energía.

$$[F(\omega)]^2 = \Psi_f(\omega) \quad (1.1.7)$$

para lo cual se puede expresar la energía de una señal como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_f(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_f(\omega)df = 2 \int_0^{\infty} \Psi_f(\omega)df = \quad (1.1.8)$$

Para que la energía se obtenga en Joules, se ve claramente que las unidades de $\Psi_f(\omega)$, serán Joules / Hz. Esto representa el aporte de energía que realiza cada componente espectral que forma la señal $f(t)$.

1.2 Espectro densidad de potencia

Existen otras señales, tales como las periódicas, donde la integral 1.1, es infinita y el concepto de energía no tiene sentido. En estos casos se considera el promedio de energía en el tiempo, lo que implica definir la potencia media de la señal.

Se denomina a estas señales de potencia, definiendo como potencia media de una señal, al promedio de potencia disipada por un resistor de 1 Ohm, al aplicársele un voltaje (o corriente) $f(t)$. Esta definición significa expresar también el valor cuadrático medio de la señal lo que se sintetiza de la siguiente manera:

$$P = \overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt \quad (1.2.1)$$

$$T \rightarrow \infty$$

Para Poder utilizar el mismo procedimiento del cálculo de la energía, es que comenzamos por definir una cierta función periódica $f_T(t)$, cuya longitud es de un solo período.

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f(t) \rightarrow |t| = \frac{T}{2} \\ f_T(t) &= 0 \rightarrow [t] \neq \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

De donde al tomar los límites de integración entre ∞ y $-\infty$ para la nueva función, queda la $f(t)$ y esto permite trabajar con la transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt \quad (1.2.3)$$

definiendo la transformada de la nueva función como $F_T(\omega)$ y utilizando la definición de energía 1.1.6

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T|^2}{T} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(t)|^2}{T} df \quad (1.2.4)$$

definiendo el espectro densidad de potencia como

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (1.2.5)$$

se puede expresar la potencia

$$P = \overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) df = 2 \int_0^{\infty} S_f(\omega) df \quad (1.2.6)$$

Se ve claramente que el espectro densidad de potencia, representa el aporte de potencia debido a cada componente espectral de la función. La unidad será watt / Hz o también Watt. Seg. / radianes según sea el eje de las frecuencias o de las frecuencias angulares.

1.3 Funciones de correlación para señales de energía

Dadas dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se define como función de correlación $R_{12}(\tau)$

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) \cdot f_2(t) dt \quad (1.3.1)$$

De la misma manera se puede definir la función de correlación $R_{21}(\tau)$ entre $f_2(t)$ y $f_1(t)$.

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \cdot f_1(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t + \tau) \cdot f_1(t) dt \quad (1.3.2)$$

Si el proceso se hace sobre la misma función, este se denomina autocorrelación $R_f(\tau)$ y se la expresa

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \cdot f(t) dt \quad (1.3.3)$$

Es posible demostrar que $R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$ y que $R_f(\tau) = R_f(-\tau)$

1.4 Funciones de correlación para señales de potencia

Para funciones periódicas², se define la correlación promedio, entre $f_1(t)$ y $f_2(t)$ a $\overline{R_{12}}(\tau)$ tal que

$$\overline{R_{12}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \cdot f_2(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t + \tau) \cdot f_2(t) dt \quad (1.4.1)$$

Con el mismo criterio es posible definir la correlación promedio entre $f_2(t)$ y $f_1(t)$ a $\overline{R_{21}}(\tau)$ tal que

$$\overline{R_{21}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) \cdot f_1(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t + \tau) \cdot f_1(t) dt \quad (1.4.2)$$

Si el proceso se realiza con la misma función, entonces estamos en presencia de la autocorrelación promedio $\overline{R_f}(\tau)$

$$\overline{R_f}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot f(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t + \tau) \cdot f(t) dt \quad (1.4.3)$$

Con las mismas consideraciones que para las señales de energía, es posible demostrar que $\overline{R_{12}}(\tau) = \overline{R_{21}}(-\tau)$ y $\overline{R_f}(\tau) = \overline{R_f}(-\tau)$

² Debe tenerse en cuenta que el contenido de energía es infinito, para lo cual se trabaja con la señal en un período T , tal como se analizó en el contenido de potencia 2.6

1.5 Relación entre la correlación y la convolución ³

La vinculación entre la correlación de dos funciones y la convolución de las mismas es

$$R_{12}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t) \quad (1.5.1)$$

Para demostrar recordamos la definición de convolución entre $f_1(t)$ y $f_2(t)$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx \quad (1.5.2)$$

La convolución de $f_1(t)$ y $f_2(-t)$ será

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(x-t) dx \quad (1.5.3)$$

Cambiando las variables $x = t$ y $t = \tau$ y reemplazándolas en 1.5.3, nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t-\tau) dx \quad (1.5.4)$$

Se ve claramente que la resultante en 5.4 es la misma expresión desarrollada en 3.1 que es la correlación entre dos funciones. De donde queda demostrada 1.5.1.

$$R_{12}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t) \quad (1.5.1)$$

1.6 Relación entre la autocorrelación y las señales de energía finita

Es posible analizar de una manera muy sencilla esta relación y la importancia de la misma, simplemente encontremos la transformada de Fourier de la autocorrelación de una señal de energía.

$$\mathfrak{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-\tau) dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t-\tau) dt \right] d\tau \quad (1.6.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \cdot F(\omega) \quad (1.6.2)$$

$$F(-\omega) \cdot F(\omega) = |F(\omega)|^2 = \Psi_f(\omega) \quad (1.6.3)$$

³ Por razones de practicidad se realizarán los análisis para señales de energía, pero estos conceptos son extensibles a las de potencia.

Se ve claramente que la transformada de Fourier de la autocorrelación es la densidad espectral de energía⁴, tal que la antitransformada del espectro da la autocorrelación de la señal.

$$\mathfrak{F}[R_f(\tau)] = \Psi_f(\omega) \quad (1.6.4)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[\Psi_f(\omega)] = R_f(\tau) \quad (1.6.5)$$

Este concepto es muy importante y permite recuperar señales en presencia de ruido, esto se analizará mas adelante.

1.7 Relación entre autocorrelación promedio y señales de potencia

Aplicando la 2.3 a la definición de autocorrelación promedio nos queda

$$\overline{R}_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot f(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cdot f_T(t - \tau) dt \quad (1.7.1)$$

Calculando la transformada de Fourier a lo expresado.

$$\mathfrak{F}[\overline{R}_f(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cdot f_T(t - \tau) dt \right] e^{j\omega\tau} d\tau \quad (1.7.2)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cdot F_T(\omega) e^{j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F_T(-\omega) \cdot F_T(\omega) = S_f(\omega) \quad (1.7.3)$$

Se ve que la transformada de Fourier de la autocorrelación promedio es la densidad espectral de potencia y la antitransformada de la densidad espectral de potencia es la autocorrelación promedio.

$$\mathfrak{F}[\overline{R}_f(\tau)] = S_f(\omega) \quad (1.7.4)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[S_f(\omega)] = \overline{R}_f(\tau) \quad (1.7.5)$$

⁴ Esta expresión se la conoce como el teorema de Wiener-Kintchine

1.8 De la incorrelación de señales

Dos señales no están correlacionadas si se cumple que:

$$\overline{R}_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \cdot f_2(t - \tau) dt = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) dt \right] \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) dt \right] \quad (1.8.1)$$

Si una de las señales (o las dos) tiene valor medio cero el resultado es cero.