2: Detección de señales en presencia de ruido

Ruido blanco. Autocorrelación del ruido blanco. Ruido limitado en banda. Correlación de una señal y un ruido. Autocorrrelación de una señal con ruido. Autocorrelación de una función binaria. Detección de señales en presencia de ruido por autocorrelación. Analizando el retardo por correlación.

2.1 Ruido blanco

El ruido es una señal aleatoria e impulsiva que tiende a encubrir la señal transmitida. Si bien es cierto la interferencia juega el mismo papel perturbador que el ruido y debe ser tenida en cuenta en la evaluación de los sistemas, se puede expresar que en general el ruido puede ser minimizable, mientras que la interferencia puede ser eliminable[5].

Al ser en la práctica una señal que varía al azar, se la considera como una señal cuyo valor medio es cero.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} n(t)dt = 0 \qquad (2.1.1)$$

La potencia disponible de ruido en función del espectro densidad de potencia $S_n(\omega)$ será N, tomando un ancho de banda sistémico B.

$$N = 2\int_{0}^{\infty} S_n(\omega)df = KTB \qquad (2.1.2)$$

K = constante de Boltzman
T = temperatura de trabajo en ºK
B = ancho de banda en Hz

El espectro densidad de potencia se puede obtener derivando la 2.1.2, respecto de la frecuencia.

$$S_n(\omega) = \frac{KT}{2} = \frac{\eta}{2} \qquad (2.1.3)$$

La densidad espectral de potencia de ruido a la salida de un sistema $S_{no}(\omega)$, cuya función de transferencia es $H(\omega)$ será

$$S_{no} = S_n \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{\eta}{2}\cdot|H(\omega)|^2 = \frac{\eta_o}{2} \qquad (2.1.4)$$

[5] ***Pedro E. Danizio. "Teoría y problemas de ruido".***

2.2 Autocorrelación de ruido blanco

Consideremos una señal de ruido blanco genérico, cuyo ancho de banda lo consideramos infinito, su densidad espectral de potencia es la expresada en 2.1.3 y para realizar su autocorrelación utilizando 1.7.5, será necesario antitransformar la densidad de potencia de ruido.

$$\overline{R_n}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{2}\cdot e^{j\omega\tau}\;d\omega = \frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{\eta}{2}\cdot\delta(\tau) \quad (2.2.1)$$

La autocorrelación de un ruido blanco es una función impulso de amplitud igual a la densidad de potencia de ruido.

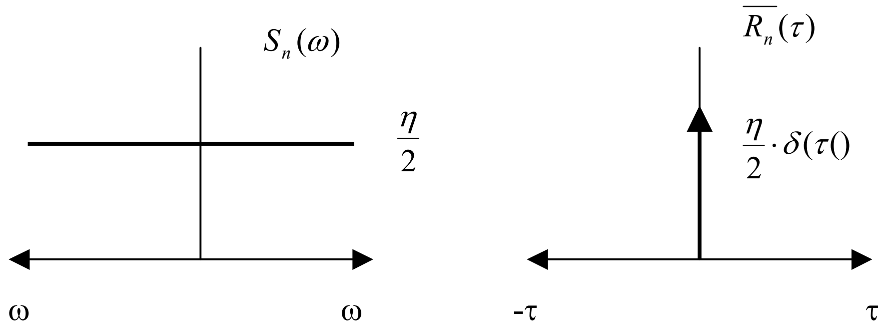

Fig. 1

La fig.1, muestra que la autocorrelación de un ruido blanco es una función impulso, esto desde el punto de vista ideal implica que un ruido al multiplicarse por si mismo con algún retardo y luego de la integración desaparece. Propiedad que es muy útil para recuperar una señal con ruido.

2.3 Ruido limitado en banda

El canal de comunicación se comporta como un filtro pasa bajo, lo que implica que el ruido de entrada queda acotado en banda según el del sistema.

Esto implica que la densidad espectral de salida, según lo expresado en 2.1.4, será $S_{no}(\omega)$ y para calcular al autocorrelación se deberá integrar entre – B y B. Utilizando la definición de 1.7.5, será necesario antitransformar la densidad espectral de ruido a la salida entre – B y B.

$$\overline{R_{nn}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\eta_o}{2}\cdot e^{j\omega\tau}\;d\omega = \frac{\eta_o}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}e^{j2\pi f\tau}d\omega = \frac{\eta_o}{2}\cdot\left[\frac{e^{j2\pi\tau t}}{j2\pi\psi}\right]_{-B}^{B} =$$

$$= \eta_o B\frac{Sen(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = \eta_o BSa(2\pi B\tau) \qquad 2.3.1$$

Es decir que la autocorrelación de un ruido limitado en banda en una función Sinc, en la práctica se la puede suponer que es cero cuando T $\rightarrow\infty$

2.4 Correlación de una señal y un ruido

Dada una señal s(t) y un ruido n(t), la autocorrelación promedio será

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s\ (t) \cdot n(t-\tau) dt \qquad (2.4.1)$$

Verifiquemos si están correlacionadas, aplicando 1.8.1

$$\overline{R_{sn}(\tau)} = \left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt \right] \cdot \left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n(t) dt \right] = 0 \qquad (2.4.2)$$

La expresión 2.4.2 es cero puesto que el segundo término el valor medio del ruido es cero según lo expresado en 2.1.1. Por lo tanto estas dos señales no se correlacionan y de hecho que es así ya que el ruido es impulsivo y aleatorio.

2.5 Autocorrelación de una señal con ruido

Dada una función formada por la señal y el ruido tal que

$$f(t) = s(t) + n(t) \qquad (2.5.1)$$

Su autocorrelación será

$$\overline{R_{sn}(\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\ (t) \cdot f(t-\tau) dt \qquad (2.5.2)$$

Reemplazando 2.5.2 en 2.5.1

$$\overline{R_{sn}(\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [s(t) + n(t)] \ \cdot [s(t-\tau) + n(t-\tau)] dt \qquad (2.5.3)$$

Desarrollando 2.5.3, aplicando las definiciones de correlación.

$$\overline{R}_{ss}(\tau) + \overline{R}_{sn}(\tau) + \overline{R}_{ns}(\tau) + \overline{R}_{nn}(\tau) \qquad (2.5.4)$$

Según 2.4.2 $\overline{R}_{sn}(\tau) = \overline{R}_{ns}(\tau) = 0$ y de acuerdo a 2.3.1 $\overline{R}_{nn}(\tau) = 0$ para $T \to \infty$, lo que implica que la autocorrelación de una señal con ruido es la autocorrelación de la señal.

Este concepto es verdaderamente significativo pues dada la autocorrelación se puede recuperar la señal original aún en presencia de ruido.

2.6 Autocorrelación de una señal binaria

En los sistemas de comunicación se transmiten señales binarias, el ruido deforma considerablemente la señal pero si tenemos la forma de su autocorrelación es posible recuperar la señal original.

Vamos a conocer de manera genérica cual es la autocorrelación promedio de una señal binaria que servirá para detectarla en presencia de ruido.

La fig. 2 muestra una señal binaria a modo de ejemplo y vamos a calcular su autocorrelación.

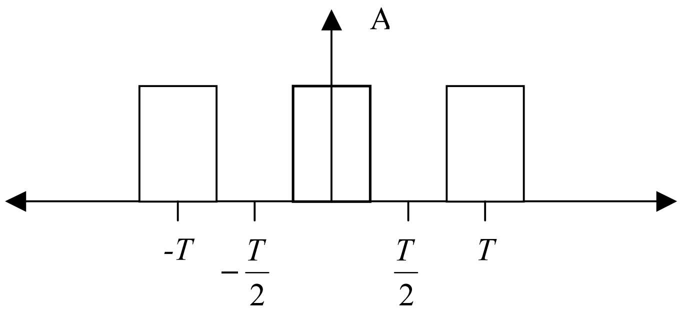

fig. 2

Atento a que la función es periódica, se puede obtener la autocorrelación en un período que se podrá evaluar entre - T / 4 y T / 4 y se lo puede expresar para $-\frac{T}{2} \le \tau \le 0$

$$\overline{R}_f(-\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}+\tau} A^2 dt = A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T}\right) \qquad (2.6.1)$$

Para $-\frac{T}{2} \le \tau \le 0$

$$\overline{R}_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}+\tau}^{\frac{T}{4}} A^2 dt = A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T}\right) \qquad (2.6.2)$$

También se podría obtener el mismo resultado calculando uno de los desplazamientos y aplicando $\overline{R}_f(\tau) = \overline{R}_f(-\tau)$.

Se ve que la autocorrelación de esta señal binaria es una onda diente de sierra y cuando se dispone de la misma se puede luego volver a transformarla en los pulsos binarios originales, la fig. 3 muestra la señal de autocorrelación.

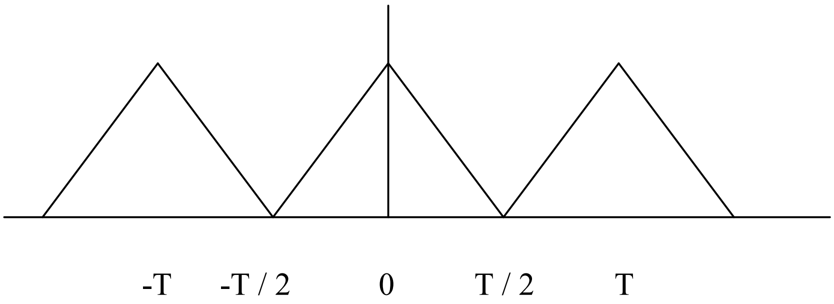

fig. 3

2.7 Detección de señales en presencia de ruido por autocorrelación

En 2.5 se analizó la autocorrelación de una señal con ruido y se demostró que es prácticamente la autocorrelación de la señal ya que la autocorrelación del ruido tiende a cero. De hecho si conocemos la autocorrelacion de una señal es posible recuperar la forma original.

Supongamos una señal binaria s(t) y su $\overline{R}_s(\tau)$, tal como se ve en la fig. 4a y 4b respectivamente.

Por otro lado tenemos un ruido blanco n(t) y su $\overline{R}_n(\tau)$, como se observa en la fig. 4c y 4d.

Obtengamos una nueva función f(t) que resulta de la suma de las dos anteriores y analicemos su autocorrelación promedio $\overline{R}_f(\tau)$, esto se analiza en la fig. 4e y 4f.

Se ve que la resultante es la autocorrelación de la señal y esta puede luego recuperarse como la s(t) original.

Es de destacar que en la salida aparece la autocorrelación del ruido blanco, esto puede dificultar la detección de señales aperiódicas, afectándose por el hecho de que se pierde el desplazamiento relativo entre señales, puesto que la autocorrelación es independiente de la fase.

Este problema se puede superar utilizando otras técnicas de correlación cruzada.

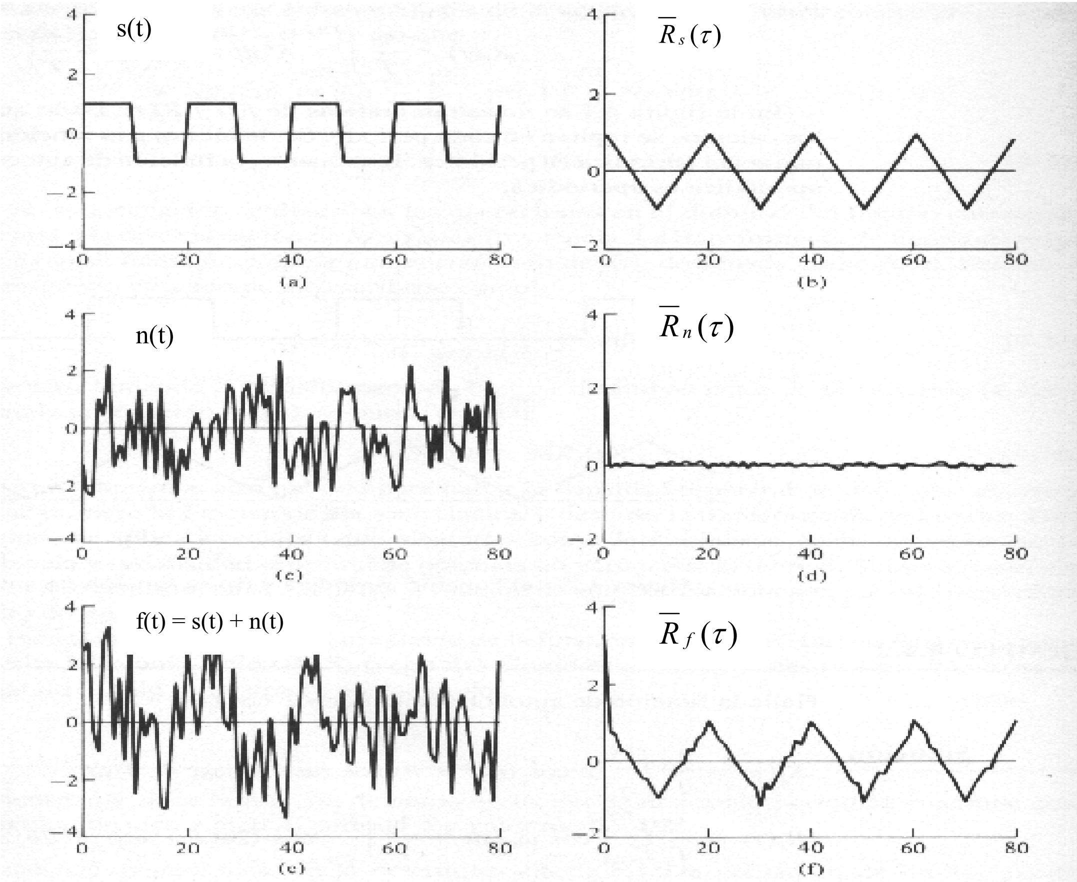

fig. 4

2.8 Analizando el retardo por correlación

A efectos de identificar la diferencia de tiempo entre las señales se puede utilizar el concepto de correlación entre dos funciones, esto se analizó en el punto 1.4 y se la suele definir como correlación mutua.

Para explicarlo tomemos una señal aleatoria $f(t)$ tal como se muestra en la fig. 5a cuya $R_{f_1}(\tau)$, es similar a la vista en 4d. Por otro lado se toma como segunda señal g(t), a una réplica retardada de f(t) mas una señal aleatoria n(t), se ve en la fig. 5b.

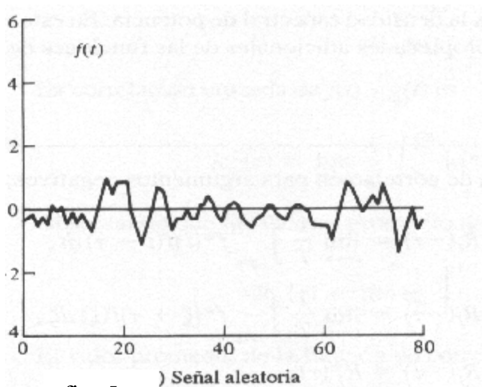

fig. 5a

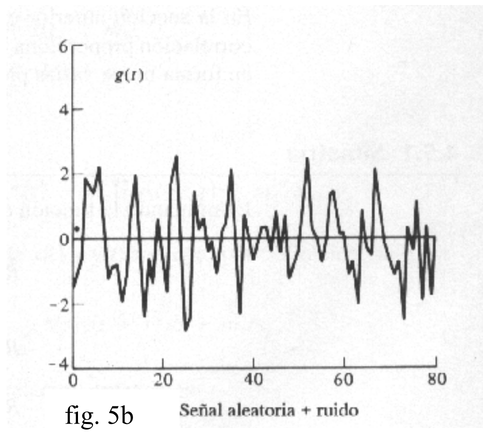

fig. 5b

Si se realiza entonces la correlación entre f(t) y g(t).

$$\overline{R}_{fg}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\,(t) \cdot g(t+\tau)dt \qquad (2.8.1)$$

Queda la resultante con el pico de la autocorrelación del ruido, desplazada desde el origen. De hecho que el receptor debe guardar en memoria una réplica de f(t). La resultante $\overline{R}_{fg}(\tau)$ se muestra en la fig. 5c.

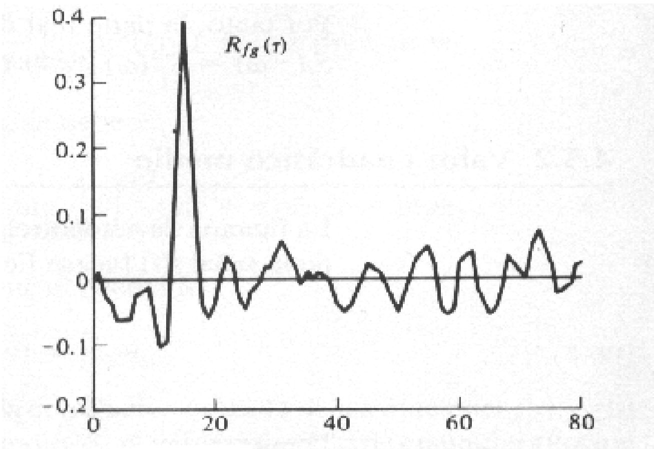

fig. 5c