

3: Análisis de la comunicación digital

De los sistemas digitales. Modelado del ruido pasabanda. El filtro óptimo. Análisis de la decisión de umbral en el filtro óptimo. Probabilidad de error. Probabilidad de error en PCM. Probabilidad de error en ASK. Probabilidad de error en FSK. Probabilidad de error en PSK.

3.1 De los sistemas digitales

Uno de las particularidades de los sistemas digitales es que en la detección participan un número finito de formas conocidas y que pueden ser recuperadas, mientras que en los sistemas analógicos actúan un número infinito de mensajes con formas de ondas desconocidas.

La posibilidad de almacenar las formas de onda como referencia y el conocimiento de la probabilidad de error, permite llegar a diversas técnicas de detección hasta con predicción.

Debe tenerse en cuenta que la detección de señales digitales, se la puede definir como la técnica de determinar cuál de las formas de onda almacenadas es la señal que esta recibiendo. Esto significa que una vez tomada la decisión se recupera exactamente la forma de onda, más allá del ruido que esta tenga. Para lo cual se puede decir que el ruido del canal no influye, pero lo que ocurre es que genera errores en la decisión.

El ruido en el canal de comunicación es aditivo, lo que implica que la señal tendrá una variación en su amplitud lo que generará error en la decisión. Esto podría eliminarse simplemente limitando la amplitud de la señal. Pero en realidad el ruido es una señal aleatoria con cualquier fase en cualquier momento lo que implica que tanto la amplitud como la fase de la señal que se transmite están variando.

En general el ruido se lo representa como un vector que se suma a la señal con cualquier fase lo que genera que la portadora resultante tiene amplitud y fase variable. Esto dificulta las decisiones puesto que los sistemas digitales, la información se transmite en la amplitud, la frecuencia o en la fase de la portadora y en los multinivel se transmite con varias amplitudes, varias fases o con una combinación de ambas.

Como el ruido afecta tanto a la amplitud como a la fase de la portadora modulada digitalmente, se cometen errores en la toma de decisión para la recuperación de la señal original.

En este capítulo se presentará un modelo del ruido en un canal que afecta la amplitud y la fase de la señal. Para luego desarrollar un filtro que sea capaz de recupera la señal en presencia de ruido con el menor error posible y por último se discutirá la probabilidad de error para los sistemas de comunicación digital.

3.2 Modelado del ruido pasabanda.

El ruido queda acotado en banda según el ancho de banda del canal y su comportamiento es tal que se comporta como un vector que al sumarse a la señal le cambia su amplitud y su fase.

De tal manera que demostraremos que se lo puede representar como una señal que tiene dos componentes una fase y otra en cuadratura.

$$n(t) = n_c(t) \cdot \cos \omega_c t + n_s(t) \cdot \sin \omega_c t \quad (3.2.1)$$

El ruido al pasar por el canal, queda acotado en el ancho de banda de este, por lo cual se dice que el canal se comporta como un filtro pasa banda⁶. Comenzaremos por demostrar que el siguiente arreglo de la fig. 6, que lo designaremos como $H_c(\omega)$, se comporta como un filtro pasa banda ideal y luego analizaremos el mismo con ruido y quedará demostrada 3.2.1.

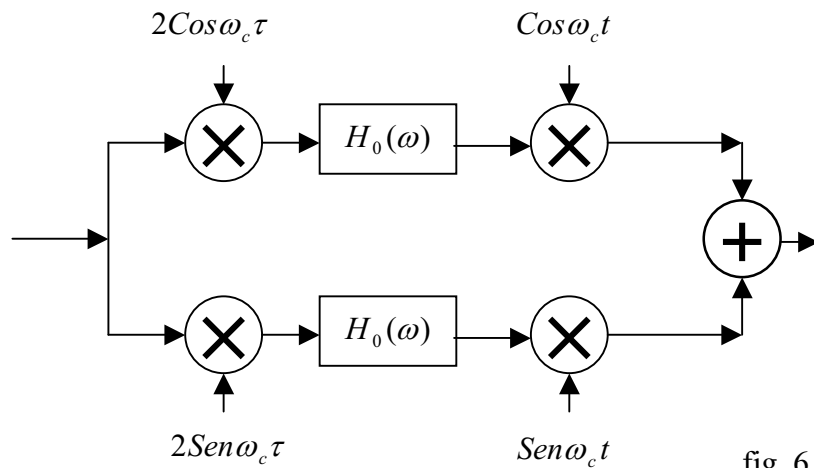


fig. 6

$H_0(\omega)$, representa la función de transferencia de un filtro pasa bajo ideal con corte en ω_m , tal como se ve en la fig. 7, siendo $h_0(t)$, su respuesta al impulso en el tiempo.

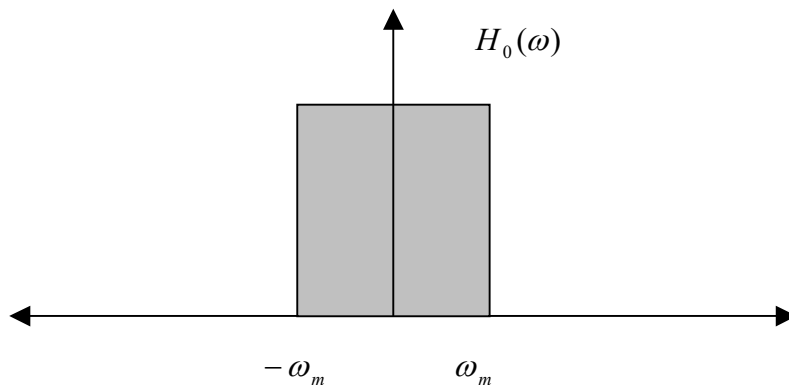


fig. 7

⁶ Si bien es cierto el canal se comporta como un filtro pasa banda no ideal, se colocan filtros en la línea con un roll-off adecuado que lo modele, tan cerca como sea posible de uno ideal.

Se aplicará a la entrada un impulso retrasado $\delta(t - \tau)$ a la entrada. Operando la primera rama la salida del modulador será.

$$2.\delta(t - \tau).Cos\omega_c \tau \quad (3.2.2)$$

La salida del filtro pasa bajo

$$2.h_o(t - \tau).Cos\omega_c \tau \quad (3.2.3)$$

La salida del otro modulador.

$$2.h_o(t - \tau).Cos\omega_c \tau.Cos\omega_c t = h_o(t - \tau)[Cos\omega_c(t - \tau) + Cos\omega_c(t + \tau)] \quad (3.2.4)$$

Operando la otra rama es la misma expresión pero multiplicando senos.

$$2.h_o(t - \tau).Sen\omega_c \tau.Sen\omega_c t = h_o(t - \tau)[Cos\omega_c(t - \tau) - Cos\omega_c(t + \tau)] \quad (3.2.5)$$

Sumando 3.2.4 y 3.2.5

$$2.h_o(t - \tau).Cos\omega_c(t - \tau) \quad (3.2.6)$$

Un filtro pasa banda ideal se lo modela como un pasa bajo ideal convolucionado en frecuencia con una portadora, fig. 8.

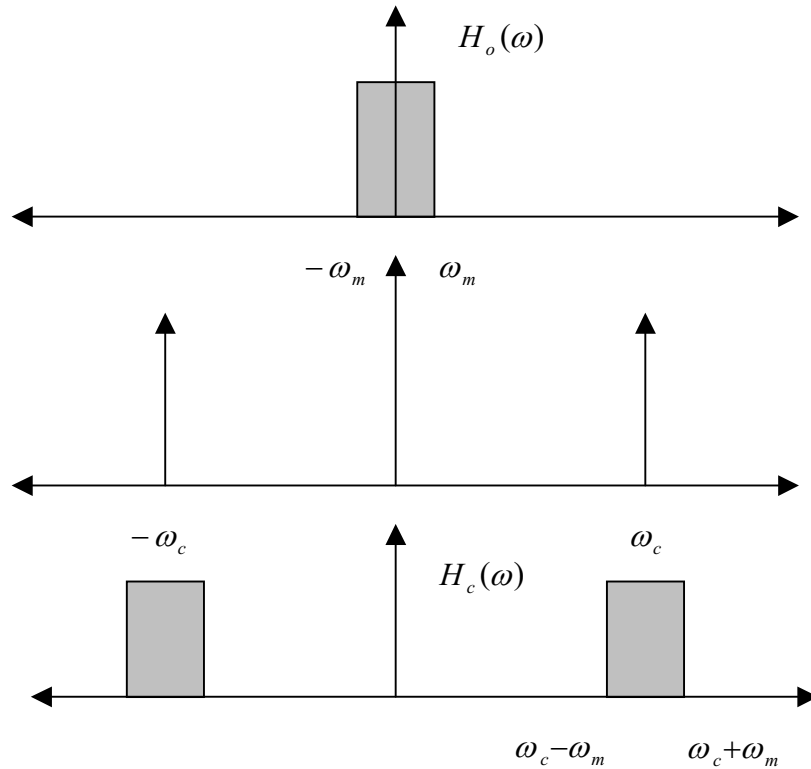


fig. 8

Para la fig. 8, podemos expresar el filtro como su respuesta al impulso multiplicada por la portadora.

$$2.h_0(t).Cos\omega_c t \quad (3.2.7)$$

La respuesta para un impulso desplazado será.

$$2.h_0(t - \tau).Cos\omega_c (t - \tau) \quad (3.2.8)$$

La 3.2.8, que representa el modelado de un filtro pasa banda, es igual a la 3.2.6, lo que implica que el arreglo de la fig. 6, representa un filtro pasa banda. Analicemos la respuesta de ese pasabanda si ingresamos un ruido $n(t)$.

Para la primera rama designamos como $n_c(t)$ a la salida del filtro pasa bajo

$$n_c(t) = n(t).Cos\omega_c \tau \quad (3.2.9)$$

La salida luego del segundo modulador será.

$$n_c(t).Cos\omega_c t \quad (3.2.10)$$

Designando con $n_s(t)$ la salida del filtro pasa bajo de la otra rama, luego del segundo modulador de esa rama se obtiene como salida.

$$n_s(t).Sen\omega_c t \quad (3.2.11)$$

La salida final resulta de la suma de ambas ramas 3.2.10 y 3.2.11 y el ruido queda entonces representado por.

$$n(t) = n_c(t).Cos\omega_c t + n_s(t).Sen\omega_c(t) \quad (3.2.12)$$

Queda entonces demostrada la 3.2.1 y es importante analizar que estas dos señales aleatorias, mantienen su relación de cuadratura pero se suman de manera aleatoria sobre la amplitud de la señal, lo que variará tanto la amplitud como la fase de la portadora modulada.

3.3 El filtro óptimo

Ya se hemos dicho que en los sistemas digitales el proceso de la detección es algo menos complicado que los sistemas continuos, puesto que la recuperación de la señal debe tomar como decisión de entre las diversas formas almacenadas cual es la señal.

Si bien es cierto que una vez tomada la decisión, la señal recuperada queda sin ruido, la presencia del ruido afectará en la toma de decisiones de la recuperación de la señal.

Por ejemplo si en un determinado momento el ruido es muy grande la decisión podrá aceptar un uno como valor y en realidad era un cero. Podemos decir que este problema significa un estudio de la probabilidad de error que ocurre cuando se detecta una señal.

Analizaremos esta problemática para señales binarias, es decir la que emplea dos símbolos por ser la más típica.

En un sistema binario, se debe decidir cual de los dos símbolos estamos recibiendo, en realidad no interesa la forma de lo que viene, puesto que podemos regenerarlos. Pero lo importante es decir cual es el símbolo. De tal manera que un sistema de detección óptimo será aquel que determine con la menor probabilidad de error si la señal esta o no presente.

Supongamos que las señales binarias duran T segundos, tanto los unos como los ceros. Necesitamos un dispositivo que sea capaz de analizar la señal cada T segundos y determinar si está o no presente. El detector óptimo será el que tenga la menor probabilidad de error al realizar su decisión.

Para facilitar este concepto lo que se hace es pasar la señal por un filtro que sea capaz de acentuar la señal $s(t)$ y eliminar al mismo tiempo el ruido $n(t)$. De tal manera que la decisión del filtro será tomada en el momento en que la señal sea la máxima y elimine el ruido, produciendo una notable diferencia entre la señal y el ruido. Entonces el momento de la decisión será muy importante, puesto que cuando la señal este presente la amplitud será muy grande y muy pequeña si no está presente.

Un filtro capaz de esto deberá actuar en el momento adecuado y con una función de transferencia que optimice esta relación señal ruido. A efectos de trabajar con rigor técnico, lo que se optimiza será el cuadrado de la amplitud de la señal y el cuadrado de la amplitud del ruido⁷.

Esto nos lleva a preguntarnos cuál deberá ser la función de transferencia de este filtro y en que momento deberá ser el instante de decisión, situación que analizaremos a continuación.

Para ser representativo el problema se puede visualizar en al fig. 9, donde ingresa una señal con ruido y a la salida tenemos la relación señal ruido optimizada.

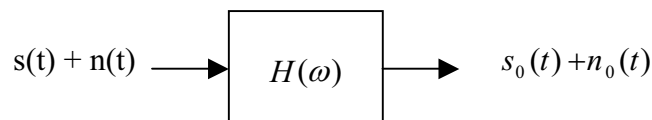


fig. 9

El objetivo será encontrar la función de transferencia que optime la relación señal ruido de salida expresada por sus cuadrados.

⁷ Debe tenerse en cuenta que se trata del valor cuadrático medio del ruido.

$$\rho = \frac{s_0^2(t)}{n_0^2(t)} \quad (3.3.1)$$

Tomando $S(\omega)$ como la transformada de la señal de entrada y $H(\omega)$, como la función de transferencia del filtro óptimo, la señal de salida en el tiempo será.

$$s_0(t) = \mathfrak{T}^{-1}[S(\omega) \cdot H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3.2)$$

Al ser la expresión independiente de t , se la puede analizar en el instante de decisión t_m simplemente reemplazando el valor en la 3.3.2

$$s_0(t_m) = \mathfrak{T}^{-1}[S(\omega) \cdot H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3.3)$$

Por lo expresado en la 2.1.4, el valor cuadrático medio del ruido de salida se lo expresa en función del espectro de potencia de ruido de entrada y de la función de transferencia del filtro como.

$$\overline{n_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.4)$$

Suponiendo ruido blanco con densidad espectral constante según 2.1.3 y reemplazando en el tiempo de decisión t_m se puede expresar la 3.3.4 como.

$$\overline{n_0^2(t_m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{\eta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.5)$$

Reemplazando 3.3.3 y 3.3.5 en 3.3.1

$$\frac{s_0^2(t_m)}{n_0^2(t_m)} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right|^2}{\pi \eta \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.3.6)$$

Es conveniente aclarar que $s_0(t)$ es un número real, lo que implica que $s_0^2(t_m) = |s_0(t_m)|^2$.

Ahora bien para completar el análisis de la 3.3.6, utilizaremos la desigualdad de Schwartz, que establece que si $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$, son funciones complejas, se cumple que⁸:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.7)$$

⁸ Por la demostración consultar Transmisión de información modulación y ruido de Misha Schwartz.

Esta desigualdad se cumple solo si

$$F_1(\omega) = k.F_2(-\omega) \quad (3.3.8)$$

Siendo k una constante arbitraria y considerando las transformadas de la siguiente manera:

$$F_1(\omega) = H(\omega) \quad \text{y} \quad F_2(\omega) = S(\omega).e^{j\omega t_m} \quad (3.3.9)$$

De tal manera que reemplazando en la 3.3.7 la 3.3.9, se puede expresar

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega).S(\omega).e^{j\omega t_m} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.10)$$

Reemplazando 3.3.10 en 3.36

$$\frac{s_0^2(t_m)}{n_0^2(t_m)} \leq \frac{1}{\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.11)$$

Siendo la igualdad el valor máximo

$$\frac{s_0^2(t_m)}{n_0^2(t_m)} \Big|_{\max} = \frac{1}{\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.12)$$

Para que esta igualdad sea válida, se debe cumplir 3.3.8, lo que implica que

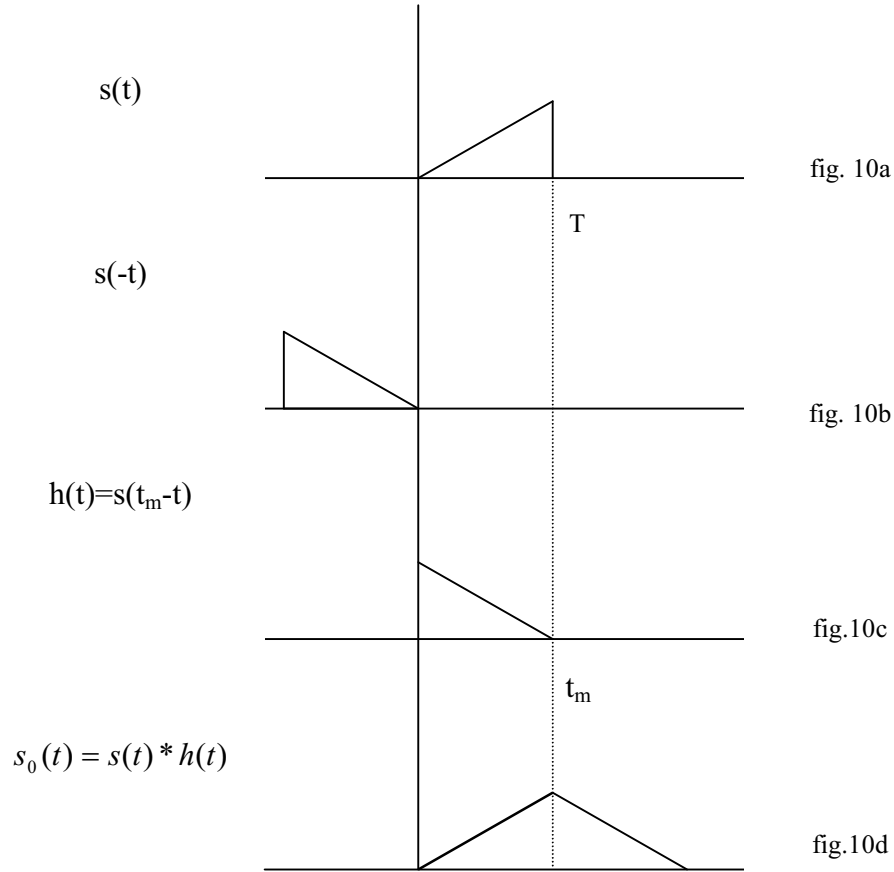
$$H(\omega) = k.S(-\omega).e^{j\omega t_m} \quad (3.3.13)$$

Esto implica que debemos interpretar como debe ser la función de transferencia del filtro óptimo para cumpla con todo lo expresado al principio, según 3.3.13, la respuesta h(t) al impulso de un sistema óptimo será:

$$h(t) = \mathfrak{I}^{-1}[H(\omega)] = \mathfrak{I}^{-1}[k.S(-\omega).e^{j\omega t_m}] = k.s(t_m - t) \quad (3.3.14)$$

Claramente se ve que la función de transferencia debe ser la inversa de la señal que entra de tal manera que cuando esta se convolucione en el tiempo con la señal de entrada la salida será la máxima, se puede decir que es un comportamiento de predicción.

Vamos a analizar gráficamente lo expuesto, supongamos que entra una señal s(t) en filtro fig. 10 a armamos la función de transferencia del filtro tomando como $t_m = T$, lo vemos en la fig. 10 b y c y luego convolucionamos la entrada con h(t) en la fig. 10 d.



Se ve claramente que en el instante de decisión la salida es la máxima, de donde el filtro esta optimizado, puesto que si se tomara $t_m < T$ el sistema sería no causal, de donde t_m deberá por lo visto ser $\geq T$. Pero en la toma de decisión para no generar demoras t_m deberá ser tan pequeño como sea posible siendo el óptimo igual a T .

De donde si el filtro tiene como función de transferencia la inversa de la señal de entrada la salida es la máxima en el punto t_m . Lo sintetizamos en la fig. 11.

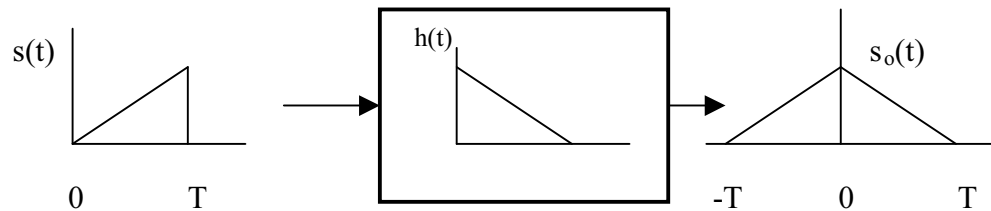


fig. 11

Según 1.1.6, la energía de una señal puede expresarse como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t).dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

De donde reemplazando 1.1.6 en 3.3.12, queda

$$\frac{s_0^2(t_m)}{n_0^2(t_m)} \Big|_{max} = \frac{E}{\frac{\eta}{2}} = \frac{2E}{\eta} \quad (3.3.15)$$

Esto equivale a decir que la mejor relación señal a ruido es el cociente de la energía de la señal y la densidad espectral de ruido a la entrada. La amplitud de la señal de salida $s_0(t)$ se la obtienen reemplazando 3.3.14 en la 3.3.2

$$s_0(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = E \quad (3.3.16)$$

De donde la amplitud máxima de la señal en la salida que ocurre en $t = t_m$, tiene como magnitud la energía de la señal. Resultado que aporta como concepto fundamental que la salida no importa en su forma sino en la existencia o no de la su energía.

Como ampliatoria de lo expuesto si analizamos el valor cuadrático medio del ruido a la salida se lo puede obtener reemplazando 3.3.16 en 3.3.15.

$$\overline{n_0^2(t_m)} = \frac{\eta \cdot E}{2} \quad (3.3.17)$$

El filtro óptimo puede ser implementado con el arreglo de un correlador de tiempo como se ve en la fig. 12. La salida $r(t)$ de un filtro esta dada por la convolución de la entrada y la respuesta al impulso del filtro $h(t)$.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx$$

Pero debe tenerse en cuenta que la $h(t)$ para el filtro óptimo es $h(t) = s(t_m - t)$ y que $h(t-x) = s(x + t_m - t)$ y tomando la decisión en $t = t_m$, queda

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot h(x + t_m - t)$$

Tomando la decisión en $t = t_m$

$$r(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot s(x) \cdot dx \quad (3.3.18)$$

Por lo expuesto la figura 12 es representativa de un modelado por correlador de tiempo

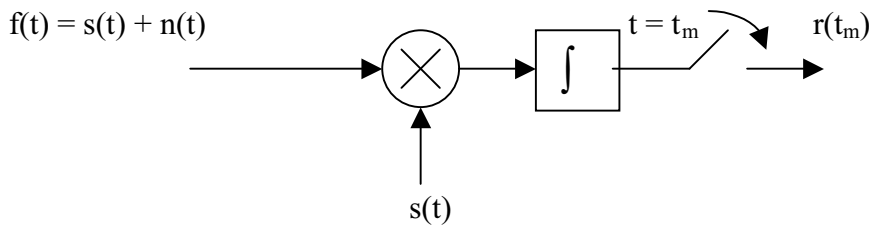


fig. 12

Visto desde un punto de vista muy conceptual esto no deja de ser detección sincrónica.

3.4 Análisis de la decisión de umbral en el filtro óptimo

El diseño del filtro optimiza la relación señal ruido a la salida en el instante de decisión $t = t_m = T$. Esto significa que en ese momento se observa la salida, para lo cual la $r(t) = r(t_m) = r(T)$, lo que se puede expresar.

$$r(T) = s_o(T) + n_o(T) \quad (3.4.1)$$

Si reemplazamos 3.3.16 en 3.4.1

$$r(T) = E + n_o(T) \quad (3.4.2)$$

Esta sería la señal de salida cuando existe la $s(t)$, pero cuando no existe la salida será simplemente ruido.

$$r(T) = n_o(T) \quad (3.4.3)$$

Es muy sencillo entonces determinar si hay o no señal, pero el ruido de salida es aleatorio, lo que implica que su valor es variable, sea grande o chico positivo o negativo, lo que complica la decisión. Puede ocurrir que $r(T)$ sea grande lo que hace suponer que existe $s_o(T)$, sin embargo esto podría ser simplemente por que el ruido es muy grande o si existiendo $s_o(T)$ y el ruido es muy grande y negativo la $r(T)$ es muy chica y se presupone que no hay señal.

De donde no hay una certeza de la decisión, sin embargo si $r(T)$ es grande hay mucha probabilidad de que $s_o(T)$ este presente y por el contrario si $r(T)$ es muy baja hay mucha probabilidad de $s_o(T)$ no este presente.

Pero como a partir de la decisión asumida existe la probabilidad de error, es conveniente encontrar una regla que haga que esa probabilidad sea la mínima posible.

Tomamos como regla un cierto umbral α , donde por encima de ese valor esta presente la señal y por debajo no. Se trata entonces de encontrar este umbral que minimice el error.