Para poder encontrar el umbral debemos considerar en primera instancia la naturaleza de la amplitud del ruido. En general el ruido esta formado por una gran cantidad de perturbaciones relativamente independientes entre si. El ruido térmico cae muy bien dentro de este concepto. Ahora bien si recordamos el teorema del límite central en probabilidad donde se puede demostrar que si una señal está compuesta por un gran número de señales relativamente independientes entre si, esta tiende a ser gaussiana.

Por lo expuesto la mejor distribución del ruido responde a una del tipo gaussiana. O dicho de otra manera la frecuencia de relativa de la aparición de las amplitudes del ruido tiene forma gaussiana.

De manera genérica esta distribución, suele designársela con el nombre de ***función de densidad de probabilidad de la amplitud x*** *(fdp)* y se la representa como p(x) y vale.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x{}^2}} \qquad (3.4.4)$$

En esta expresión $\sigma_x{}^2$, representa el valor cuadrático medio de la señal y para mejor interpretación la fig. 13, muestra la función de distribución, donde se ve que es simétrica respecto de x = 0.

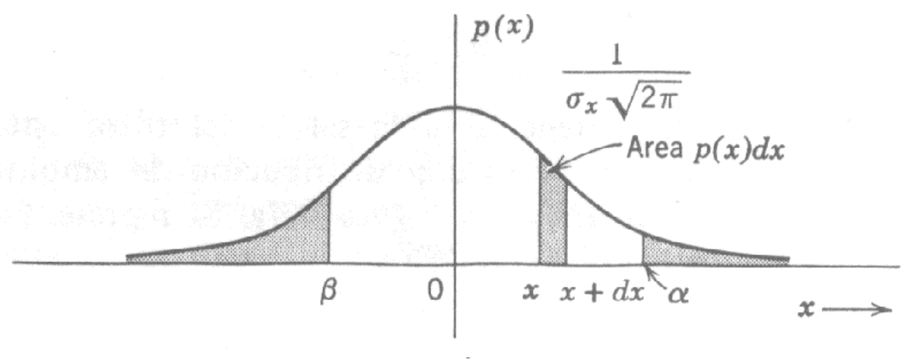

fig. 13

La señal tiene igual probabilidad de ser negativa que positiva, por lo cual el valor medio es cero. La fdp, representa la frecuencia de ocurrencia de amplitudes y esta normalizada de tal manera que el área p(x).dx, representa la probabilidad de observar la amplitud dentro del intervalo x, x + dx. Ahora bien si la observamos entre el intervalo que va desde 0 a T ($T \rightarrow \infty$), la amplitud estará en el intervalo x, x + dx, en cierto tiempo dT que vendrá dado por

$$dT = \sum_{i=1}^{\infty} dt_1 \qquad (3.4.5)$$

Por lo tanto la frecuencia relativa de observar la señal en el intervalo x, x + dx es dT / T, de donde

$$p(x).dx = \frac{\sum dt_i}{T} \quad (3.4.6)$$

Entonces lo expuesto permite determinar que la probabilidad de observar x en el intervalo (x_1, x_2), esta dada por el área de p(x) bajo (x_1, x_2):

$$\text{Probabilidad}\,(x_1 \prec x \prec x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x).dx \quad (3.4.7)$$

También la probabilidad de observar $x \succ \alpha$ y $x \prec \beta$, viene dada por:

$$\text{Probabilidad }\,(x \succ \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} p(x).dx \quad (3.4.8)$$

$$\text{Probabilidad }\,(x \prec \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} p(x).dx \quad (3.4.9)$$

Para el ruido de salida $n_0(t)$, el valor cuadrático medio esta dado por 3.3.17, donde en la 3.4.4, $\sigma_x^{\ 2}$ representa este valor por lo tanto.

$$\sigma_x^{\ 2} = \frac{\eta.E}{2} \qquad (3.4.10)$$

Reemplazando en 3.3.4

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{\frac{-x^2}{\eta E}} \qquad (3.4.11)$$

Si aplicamos estos conceptos a la salida del filtro óptimo. Cuando s(t) no está la salida es el ruido $n_0(T)$, con la distribución de amplitud según lo expresa 3.4.11, como se ve en la fig. 14 donde representamos con r la amplitud de salida entonces r $= n_0(T)$ y la 3.4.11 puede expresarse.

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{\frac{-r^2}{\eta E}} \qquad (3.4.12)$$

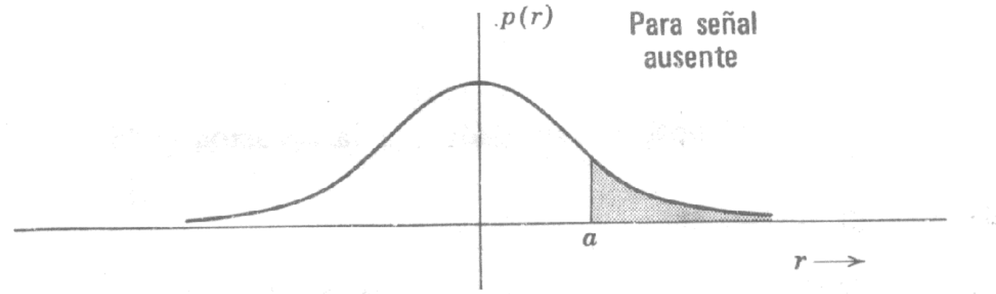

fig. 14

En el caso de que la señal esté presente tendremos la energía y el ruido tal que r = E + $n_0(T)$, con la distribución correspondiente que se ve en la fig. 15 y la 3.4.12 es la misma pero desplazada el valor de E.

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{\frac{-(r-E)^2}{\eta E}} \qquad (3.4.13)$$

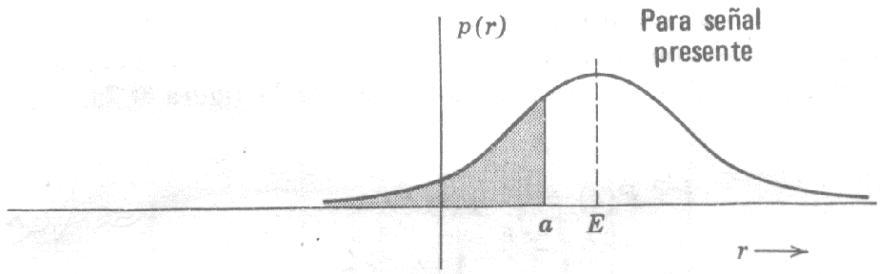

fig. 15

Para clarificar la distribución en la fig. 16 se muestran ambas siendo α el umbral de decisión. Es decir si r $>\alpha$, es señal presente y si r $<\alpha$, es señal ausente.

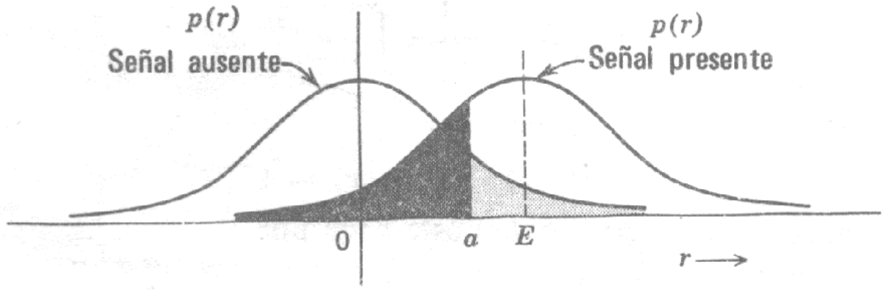

fig. 16