

De hecho que puede darse el caso de señal ausente estando presente o viceversa. De donde la probabilidad de que $r > \alpha$ cuando la señal no está presente queda representada en el área sombreada. Siendo α el umbral se comete error (falsa alarma) con probabilidad igual al área sombreada de la fig. 14. También es posible que estando la señal de salida r baje por debajo de α , en ese caso el error es de normalidad y la probabilidad es igual al área sombreada de la fig. 15.

Si consideramos que $s(t)$, tiene la misma probabilidad de estar presente que ausente, entonces la probabilidad de error estará dada por la media de las dos áreas, siendo muy sencillo darse cuenta que la suma de las áreas es mínimas si se elige como umbral a $E / 2$.

3.5 Probabilidad de error

Habiendo supuesto que la señal tiene comportamiento equiprobable en presencia y ausencia⁹, el umbral queda definido como la mitad de la energía de la señal. Esto implica que las dos áreas son iguales y se puede utilizar cualquiera de las dos figuras sea la 14 o la 15. De tal manera que utilizando la fig. 14 la probabilidad de error se puede expresar como:

$$P(\varepsilon) = \int_{\alpha}^{\infty} p(r).dr = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \eta \cdot E}} \cdot e^{\frac{-r^2}{\eta \cdot E}} dr \quad (3.5.1)$$

Esta integral no se la puede evaluar de manera cerrada y se la debe trabajar mediante la ayuda de cualquiera de las tabulaciones operativas sean de la función $\text{erf}(x)$, $\text{erfc}(x)$ o de $Q(x)$. A efectos de trabajar con comodidad a continuación desarrollaremos estas funciones¹⁰ y sus equivalencias.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2} dy \quad (3.5.2)$$

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (3.5.3)$$

$$\text{erfc}(x) + \text{erf}(x) = 1 \quad (3.5.4)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_x^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \quad (3.5.5)$$

$$\text{erfc}(x) = 2Q(x\sqrt{2}) \quad (3.5.6)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.5.7)$$

⁹ En la práctica es mayor el número de ausencias que de presencias

¹⁰ En la actualidad estas definiciones tienen pequeñas diferencias según la bibliografía que se consulte.

Aplicando 3.5.5 a 3.5.1 queda

$$P(\varepsilon) = Q \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\eta \cdot E}{2}}} \right) \quad (3.5.8)$$

Si reemplazamos el valor de α por $E / 2$ entonces:

$$P(\varepsilon) = Q \left(\frac{E}{2 \cdot \eta} \right) \quad (3.5.9)$$

Esta expresión genérica permitirá analizar el comportamiento de los sistemas de comunicación digital frente al ruido. En la figura 17 se presenta la $P(\varepsilon)$ en función de la $\frac{E}{\eta}$. Como aspecto complementario de interpretación de la $P(\varepsilon)$ se puede decir que la probabilidad de un evento implica trabajar con la frecuencia relativa del mismo, entonces si sobre N decisiones y N_e equivocadas, la $P(\varepsilon)$ se la define como $P(\varepsilon) = \frac{N_e}{N}$ y $N_e = P(\varepsilon) \cdot N$. Si $P(\varepsilon)$ es $1 / 1000$, implica que cada mil decisiones una es incorrecta.

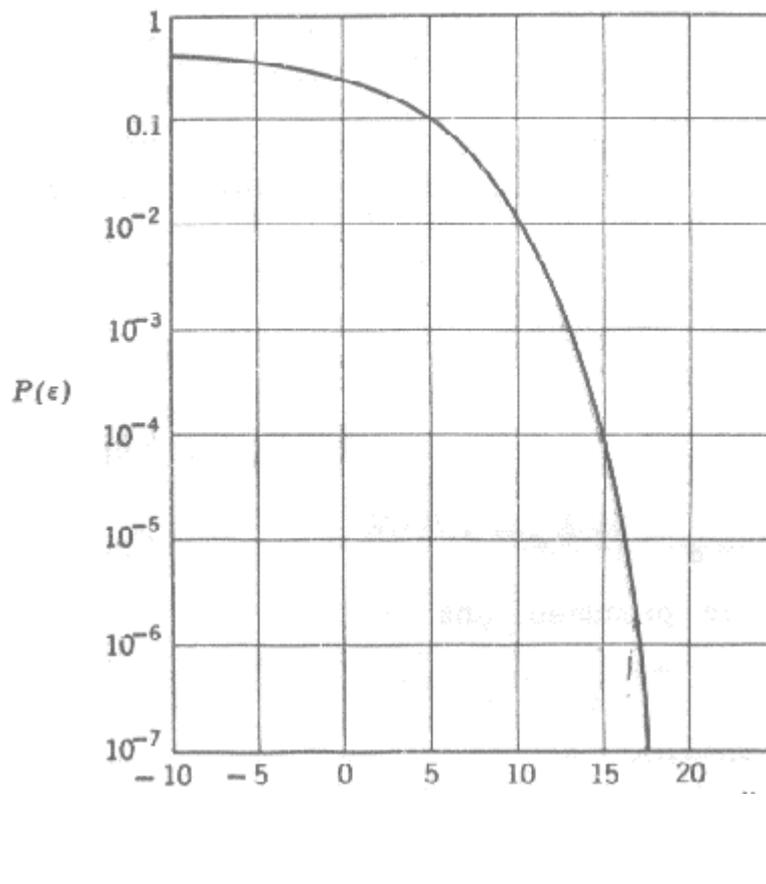


fig. 17

$$\left(\frac{E}{\eta} \right)_{dB}$$

3.6 Probabilidad de error en PCM

La señal $s(t)$ de PCM binaria es un pulso rectangular de amplitud A y duración T , como se ve en la fig. 18.

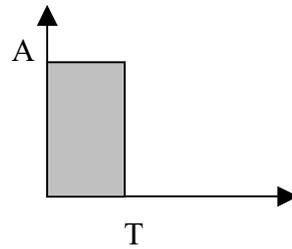


fig. 18

La respuesta al impulso del filtro óptimo según la 3.3.14 es

$$h(t) = s(T - t)$$

La $s(T - t) = s(t)$, puesto que esto implica rotar la $s(t)$ alrededor del eje vertical y desplazarla T segundos. La energía E , viene dada por

$$E = A^2 \cdot T \quad (3.6.1)$$

La amplitud de la señal es k veces mayor que el ruido.

$$A = k \cdot \sigma_n \quad (3.6.2)$$

Reemplazando 3.6.2 en 3.6.1

$$E = k^2 \cdot \sigma_n^2 \cdot T \quad (3.6.3)$$

Donde σ_n^2 , es el valor cuadrático medio del ruido tal que

$$\sigma_n^2 = N_i = \overline{n^2(t)} \quad (3.6.4)$$

Si la duración de los pulsos es T , existen $1 / T$ pulsos por segundo y el ancho de banda necesario para un sistema ideal es la mitad de esta velocidad, tal que.

$$B = \frac{1}{2 \cdot T} \quad (3.6.5)$$

Considerando la Potencia de ruido en función del espectro densidad de potencia, según lo expresado en la 2.1.2 y 2.1.3.

$$N_i = \eta \cdot B = \frac{\eta}{2 \cdot T} = \sigma_n^2 \quad (3.6.6)$$

Despejando η

$$\eta = 2 \cdot T \cdot \sigma_n^2 \quad (3.6.7)$$

Aplicando 3.6.3 y 3.6.7 a la 3.5.9

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{k^2 \cdot \sigma_n^2 \cdot T}{4 \cdot \sigma_n^2 \cdot T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{k^2}{4}}\right) = Q\left(\frac{k}{2}\right) \quad (3.6.9)$$

A modo de análisis si suponemos que $k = 7.95$, la E / η será de 15 dB y según la fig. 17 la $P(\varepsilon) = 10^{-4}$, es decir uno equivocado cada 10000. Más allá que este valor que se da a modo de ejemplo¹¹, es conveniente aclarar que en la práctica los pulsos se deforman y se aproximan a formas trapezoidales lo que implica que la $h(t)$ del filtro óptimo seguirá esa forma.

3.7 Probabilidad de error para ASK

La señal básica de PCM, transmitida en OOK, es simplemente la presencia de la portadora o su ausencia, para lo cual la $s(t)$ será.

$$s(t) = A \text{sen } \omega_c t \quad \text{para } 0 < t < T$$

$$s(t) = 0 \quad \text{para cualquier otro punto}$$

Encontraremos el receptor óptimo y la $P(\varepsilon)$, suponiendo las mismas condiciones de equiprobabilidad. Según 3.3.14

$$h(t) = s(T - t)$$

y es claro $s(T - t) = -s(t)$ lo que significa que

$$h(t) = s(T - t) = -s(t) \quad (3.7.1)$$

En la fig. 19, se representa la $s(t)$ como un seno en el momento de existencia.

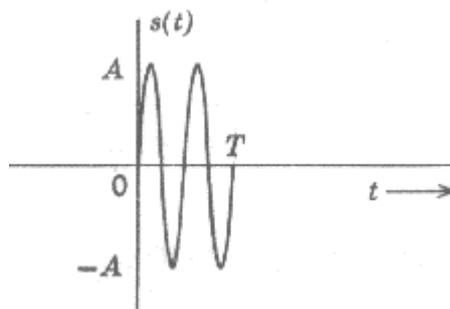


fig. 19

¹¹ Se consideran aceptables dentro de ciertas condiciones valores del orden de 10^{-6}

La figura 20 presenta la $h(t)$ correspondiente para un filtro acoplado

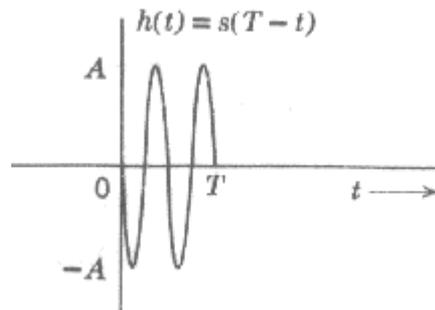


fig. 20

Si la señal de entrada de la fig. 19 se la convoluciona en el tiempo con la $h(t)$ de la fig. 20 tendremos la respuesta del filtro y de hecho que en el instante de decisión T obtendremos la salida máxima. Esta $r(t)$ queda mostrada en la fig. 21.

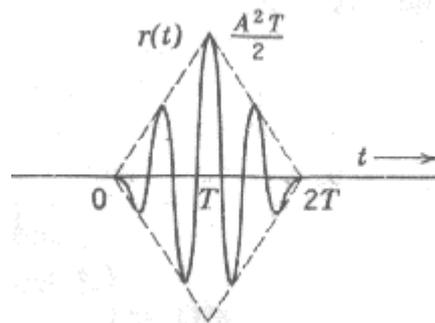


fig. 21

La energía de la $s(t)$ será

$$E = \frac{A^2}{2} T \quad (3.7.2)$$

Sabiendo que el umbral será la mitad de la energía.

$$\alpha = \frac{A^2}{4} T \quad (3.7.3)$$

Aplicando 3.7.2 en 3.5.9

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right) = Q\left(\frac{A}{2} \sqrt{\frac{T}{\eta}}\right) \quad (3.7.4)$$

Se puede analizar la $P(\varepsilon)$ también en función de la potencia media de la señal y a partir de la energía se puede expresar que la señal esta la mitad del tiempo lo que implica expresar que la potencia media será:

$$P = \frac{E}{2.T} = \frac{A^2}{4} \quad (3.7.5)$$

Reemplazando en 3.7.4

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{P.T}{\eta}}\right) \quad (3.7.6)$$

El planteo supone que se cumplen las condiciones ya expresadas para la $s(t)$, se puede aplicar esto mismo con el modelado por correlador de tiempo expresado en 3.3.18, de tal manera que la fig. 22 será la representación al efecto.

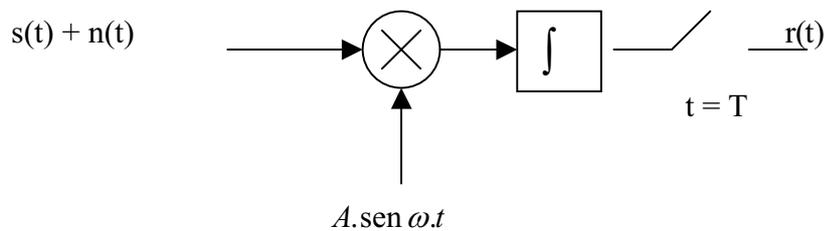


fig. 22

3.8 Probabilidad de error para FSK

La señal de FSK, esta compuesta por dos componentes de distinta frecuencia.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cdot \text{sen } m\omega_c t \quad \text{para } 0 < t < T \quad (3.8.1) \\ s_1(t) &= 0 \quad \text{para cualquier otro punto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(t) &= A \cdot \text{sen } n\omega_c t \quad \text{para } 0 < t < T \quad (3.8.2) \\ s_2(t) &= 0 \quad \text{para cualquier otro punto} \end{aligned}$$

Donde la $\omega_c = \frac{2.\pi}{T}$ es la frecuencia de portadora, donde m y n , son valores que mantiene la relación de multiplicidad.

La $s(t)$ conformada se muestra en la fig. 23, donde la presencia es $s_1(t)$ con una frecuencia de multiplicidad m y la ausencia es $s_2(t)$ con otra frecuencia de multiplicidad n , respecto de la portadora.

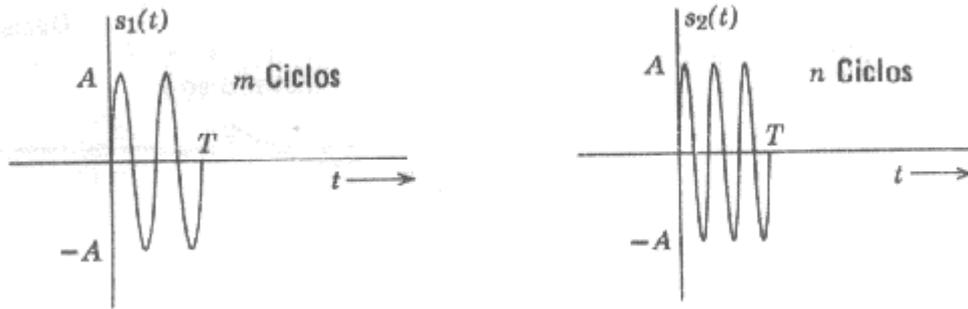


fig. 23

Para generarla se utilizan dos OOK, uno por los unos y otro por los ceros. Entonces la banda base es invertida en una de las ramas antes de ingresar al modulador de producto, de tal manera de dar salida con una de las componentes de portadora con los ceros. Por ello en la expresión $s(t) + n(t)$, una de las componentes debe ser invertida para que al final se sumen los efectos y se duplique la amplitud final resultante.

$$f(t) = s(t) + n(t) = s_1(t) + n(t) - s_2(t) \quad (3.8.3)$$

La energía resultante de esta señal E_f sin tener en cuenta el ruido será

$$E_f = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \quad (3.8.4)$$

Donde $s_1(t)$ y $s_2(t)$, están dadas por las 3.8.1 y 3.8.2, siendo el último término de la 3.8.4 entonces si.

$$\int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt = E = \frac{A^2 \cdot T}{2} \quad (3.8.5)$$

Esto implica que la energía de la función es la suma de las energías (E) de las componentes, lo cual es muy lógico puesto que ese es el efecto que se busca para mejorar su comportamiento frente al ruido.

$$E_f = 2 \cdot E = A^2 \cdot T \quad (3.8.6)$$

Sabiendo que el umbral de decisión es la mitad de la energía total nos queda que dicho valor es la E de cada señal. Considerando entonces que $s_1(t)$ esta si $r(T) > E$ y de la misma manera que $s_2(t)$, esta presente si $r(T) > E$. Para lo cual reemplazando en la 3.5.9, estos valores.

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right) \quad (3.8.7)$$

3.9 Probabilidad de error en PSK

En esta técnica la portadora está siempre presente pero variando su fase según estado sea alto o bajo. Es decir la señal esta formada por dos componentes con signos opuestos, $s_1(t) = -s_2(t) = s(t)$. La fig. 24 a corresponde a $s_1(t)$ y la 24 b representa $s_2(t)$.

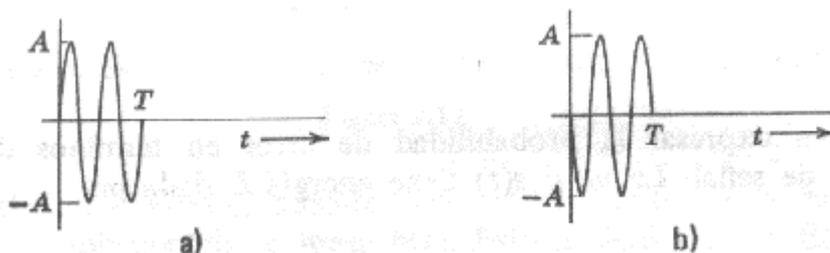


fig. 24

Suponiendo que la duración de cada símbolos es T segundos, se puede expresar que según 3.4.2 la respuesta puede expresarse para $s_1(t)$.

$$r(T) = E + n_0(t) \quad (3.9.1)$$

la función de distribución

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \eta \cdot E}} e^{-\frac{(r-E)^2}{\eta \cdot E}} \quad (3.9.2)$$

La fig. 25 muestra esta distribución, es decir $p(r)$ cuando la señal esta presente

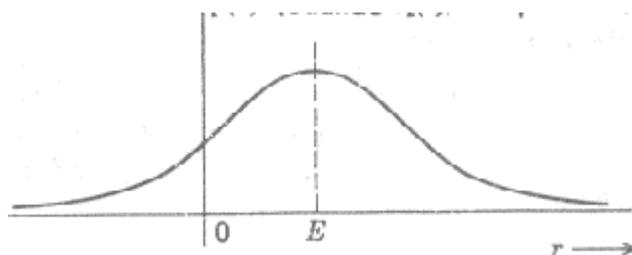


fig. 25

Con el mismo análisis es posible encontrar la respuesta y su distribución para $s_2(t)$.

$$r(T) = -E + n_0(t) \quad (3.9.3)$$

y la función distribución

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \eta \cdot E}} e^{-\frac{(r+E)^2}{\eta \cdot E}} \quad (3.9.4)$$

La fig. 26 representa dicha distribución

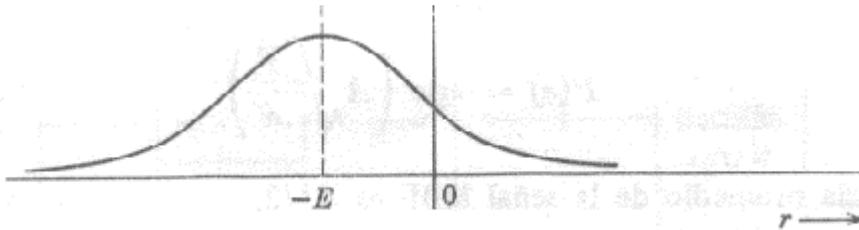


fig. 26

Analizando las dos distribuciones que se representan juntas en la fig. 27, es necesario encontrar el umbral de decisión que cometa el mínimo error. Es claro que como tenemos una representación simétrica con valores negativos y positivos, este umbral es cero.

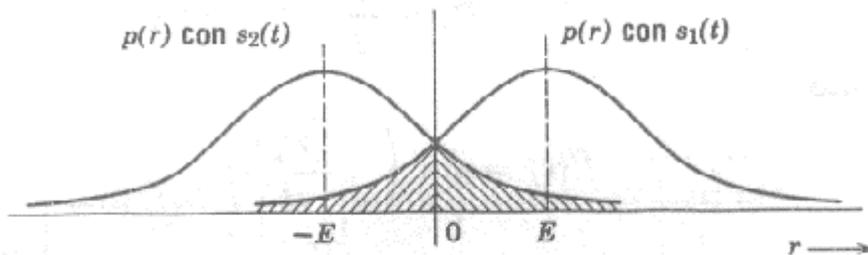


fig. 27

Es evidente que el área sombreada es la probabilidad de error, considerando que si $r(T) > 0$ implica que $s_1(t)$ está presente, por otro lado si $r(T) < 0$ significa $s_2(t)$ presente. La probabilidad de error será.

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \eta \cdot E}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(r+E)^2}{\eta \cdot E}} \quad (3.9.5)$$

Esta expresión es la misma que la 3.5.1, solo que el valor de α es igual a E , para lo cual resolviendo

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E}{\eta}}\right) \quad (3.9.6)$$