Guia 3. Circuitos de primer y segundo orden

Ejercicio 1.

Calcular y graficar la respuesta $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$ de la figura 1, si estuvo conectado a la fuente por un tiempo suficientemente grande como para considerar extinguido el régimen transitorio.

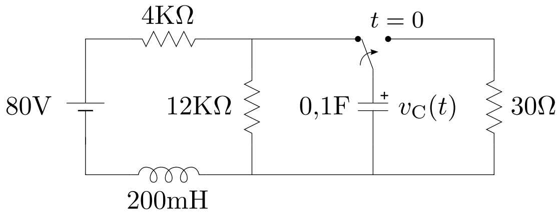


Figura 1: Respuesta natural de $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 2.

Hallar la respuesta $i_{\mathrm{L}}(t)$ del circuito de la figura 2 para $t > 0$.

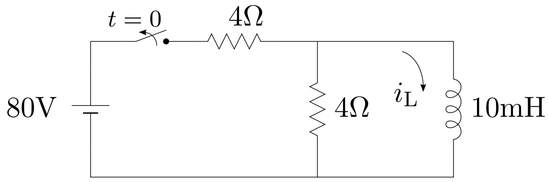


Figura 2: Hallar $i_{\mathrm{L}}(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 3.

Calcular y graficar la respuesta $i_{\mathrm{L}}(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 3, si estuvo conectado a la fuente por un tiempo suficientemente grande como para considerar extinguido el régimen transitorio.

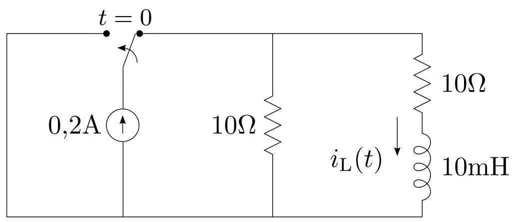
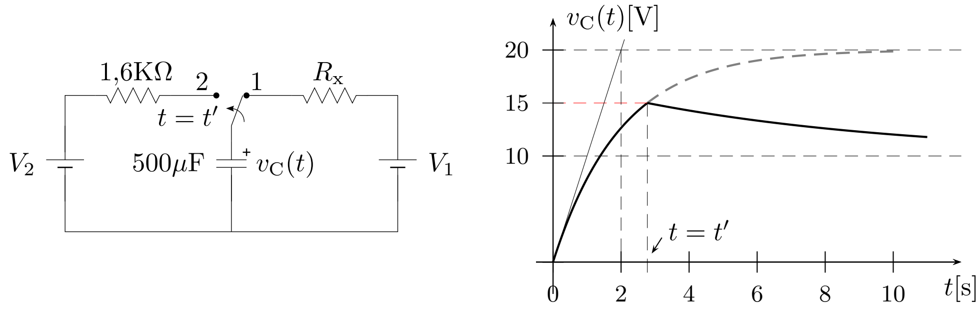


Figura 3: Respuesta natural de $i_{\mathrm{L}}(t) \forall t > 0$.

Ejercicio 4.

En el circuito de la figura 4a se conecta el capacitor a la fuente de V_1 en $t = 0$ (posición 1), luego de un tiempo $t = t'$ se cambia el interruptor conectando la fuente de V_2 (posición 2). Siendo la respuesta de la tensión del capacitor $v_{\mathrm{C}}(t)$ la del gráfico de la figura 4b, calcular el tiempo $t = t'$ del cambio de interruptor, y la resistencia R_{x} del circuito.



(a) **(b)**

Figura 4: Calcular el tiempo $t = t'$ en el que conmuta el circuito.

Ejercicio 5.

Hallar la respuesta $i_{\mathrm{L}}(t)$ del circuito de la figura 5, sabiendo que $i_{\mathrm{L}}(0) = 3\mathrm{A}$.

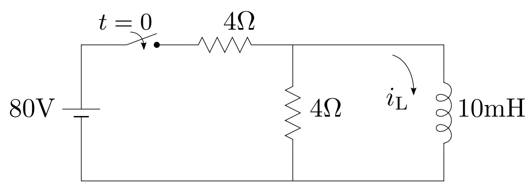


Figura 5: Hallar $i_{\mathrm{L}}(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 6.

El capacitor de la figura 6 tiene una carga inicial de $Q_0 = 800 \times 10^{-6}\mathrm{C}$ según la referencia indicada. Hallar la respuesta completa de la tensión del capacitor, y la evolución de las cargas con el tiempo.

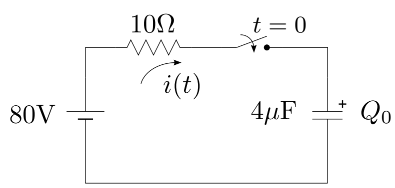


Figura 6: Respuesta completa de la tensión en el capacitor.

Ejercicio 7.

Encontrar y graficar la tensión y corriente en la resistencia de carga del circuito de la figura 7 para todo $t > 0$.

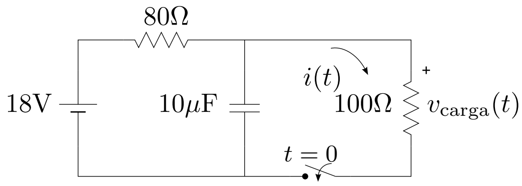


Figura 7: Encontrar y graficar la tensión y corriente en R.

Ejercicio 8.

Calcular la respuesta de la tensión del capacitor $v_\mathrm{C}(t)\forall t > 0$ del circuito de la figura 8 aplicando en teorema de superposición. Comparar el resultado con el ejercicio .

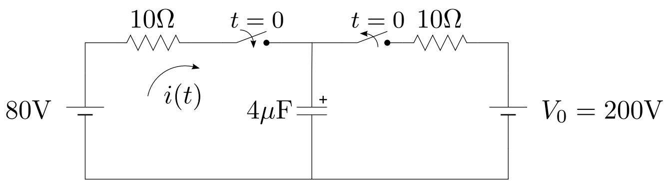


Figura 8: Respuesta completa de $v_\mathrm{C}(t)$ mediante superposición.

Ejercicio 9.

Encontrar $i(t)$ para $t > 0$, según se indica en el circuito de la figura 9.

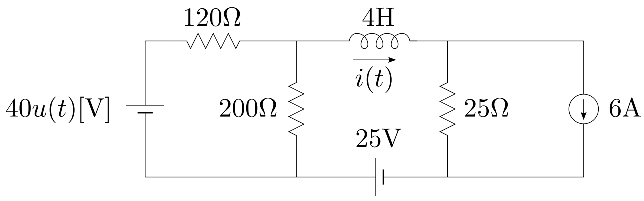


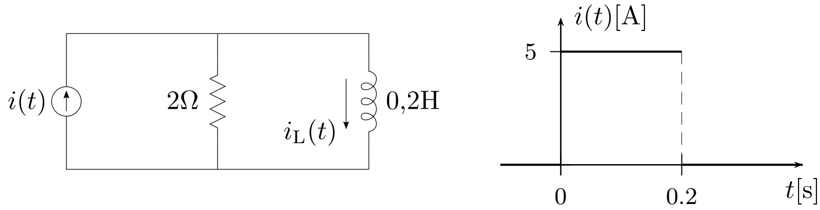
Figura 9: Encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 10.

Encontrar la respuesta $i_\mathrm{L}(t)$ para $t >$ del circuito de la figura 10a.

Ejercicio 11.

Utilizando capacitores, resistencias, una fuente de 12V, un pulsador y un comparador de tensión como el de la figura 11, diseñar un temporizador para luz de pasillo de 10s de duración. La salida del comparador se puede modelar como:



(a) **(b)**

Figura 10: Circuito RL paralelo (a) excitado por la función pulso (b).

$$v_{\text{out}} = \begin{cases} 12\text{V} & \text{si } v_1(t) > v_2(t) \\ 0\text{V} & \text{si } v_1(t) < v_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

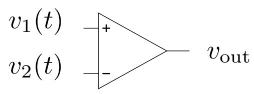


Figura 11: Temporizador para luz de pasillo.

Ejercicio 12.

En el circuito de la figura 12 el capacitor C_1 tiene una carga inicial $Q_1 = q_{C_1}(0) = 300{\times}10^{-6}$C según la polaridad indicada. Si se cierra el interruptor en $t = 0$, utilizando las referencias señaladas en el circuito se pide encontrar:

1. la corriente $i(t)$,
2. las tensiones $v_{C_1}(t)$, $v_R(t)$ y $v_{C_2}(t)$,
3. graficar las tres tensiones en un mismo sistema de ejes.

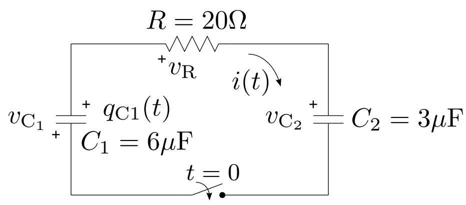


Figura 12: Evolución de la tensión natural en un par de capacitores.

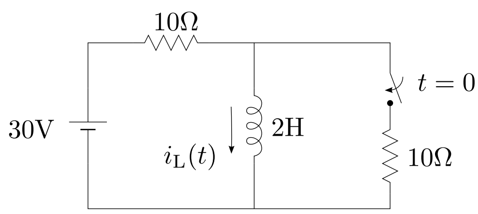


Figura 13: Respuesta completa de corriente en RL serie.

Ejercicio 13.

En el circuito de la figura 13, encontrar y graficar la corriente $i_{\mathrm{L}}(t)$ para todo $t > 0$.

Ejercicio 14.

Seleccione un valor de L tal que el voltaje del solenoide supere los 20V, y la magnitud de la corriente del inductor esté por encima de los 500mA durante los primeros 25ms. Calcular además la energía almacenada en la bobina en el momento que se abre el interruptor (figura 14).

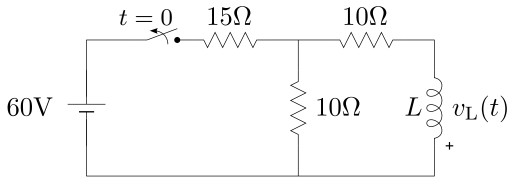


Figura 14: Calcular el valor de L.

Ejercicio 15.

Hallar para $t > 0$ la $i(t)$ indicada en la figura 15.

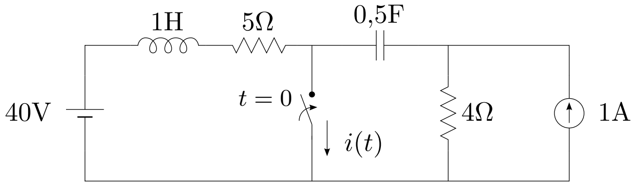
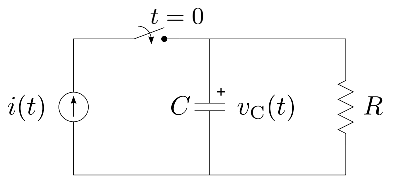


Figura 15: Encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 16.

El circuito de la figura 16 se conecta en $t = 0$, encontrar la respuesta $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$.



$i(t) = 10\,\mathrm{sen}(2\pi 50t)[\mathrm{A}]$

$C = 10000\mu\mathrm{F}$

$R = 20\Omega$

Figura 16: Encontrar $v_C(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 17.

Utilizando el método de superposición hallar la corriente $i_L(t)$ y la tensión $v_C(t)$ del circuito de la figura 17 para $t > 0$.

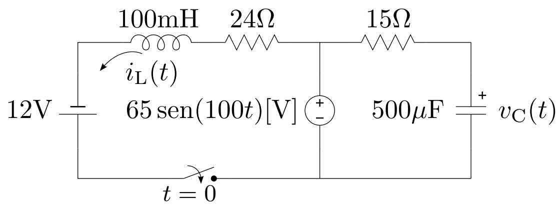


Figura 17: Encontrar $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 18.

Determinar la tensión del capacitor $v_C(t)$ y la corriente $i(t)$ del circuito de la figura 18 para todo $t > 0$ si el interruptor se conecta a la posisción 1 en $t = 0$ y se pasa a la posición 2 en $t = 1\mathrm{s}$.

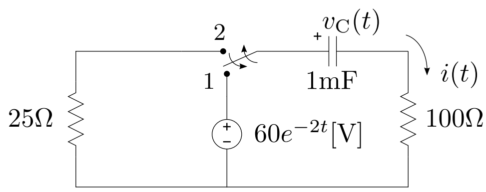


Figura 18: Circuito RC con fuente exponencial.

Ejercicio 19.

Encontrar la respuesta completa de tensión de cada componente del circuito de la figura 19. En $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 30°$.

Ejercicio 20.

Del circuito de la figura 20 determinar para $t = 0^+$ los valores $v_C(0^+)$, $v_L(0^+)$, $i_C(0^+)$ e $i_L(0^+)$ según las referencias que se indican en el circuito. En $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 60°$.

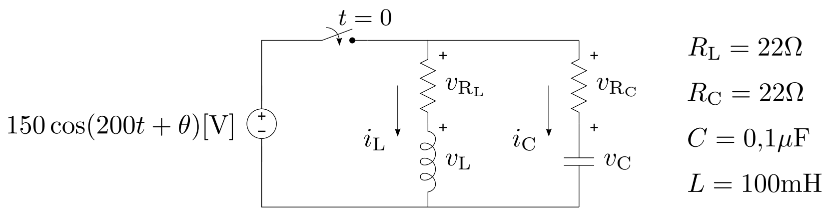


Figura 19: Encontrar las tensiones de cada elemento para $t > 0$.

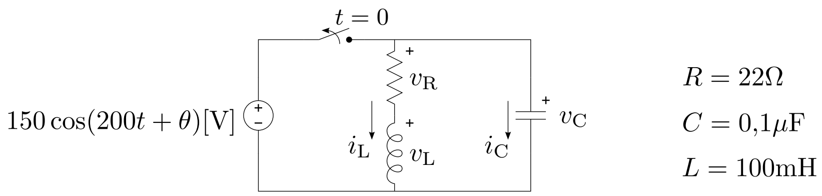


Figura 20: Hallar los valores iniciales de tensión y corriente.

Ejercicio 21.

Calcular la tensión del capacitor del circuito de la figura 21 aplicando superposición.

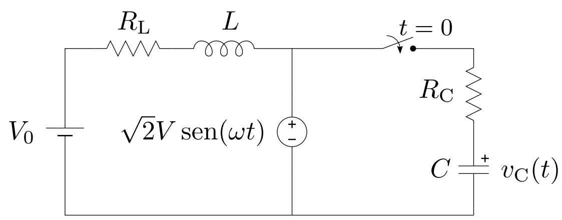


Figura 21: Respuesta completa por superposición.

Ejercicio 22.

Para el circuito de la figura 22 se pide:

- Encontrar la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.
- Calcular el valor eficaz del régimen permanente de esta corriente.

Ejercicio 23.

Encontrar la respuesta completa de tensión en el capacitor y corriente en el inductor para $t > 0$ del circuito de la figura 23, e indicar el tipo de amortiguamiento del sistema.

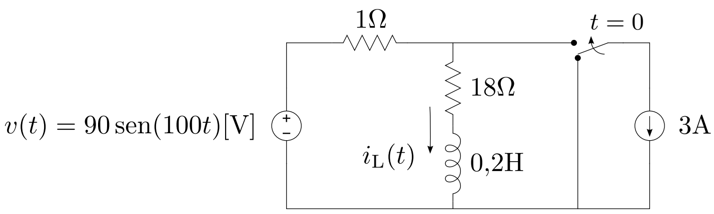


Figura 22: Corriente en el inductor.

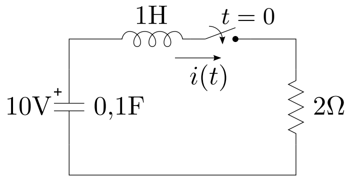


Figura 23: Cálculo de la respuesta natural.

Ejercicio 24.

En un circuito como el de la figura 24 con dos elementos que almacenan energía, se conoce como resistencia crítica R_{cr} al valor resistivo para el cuál la respuesta del circuito es críticamente amortiguada. Encontrar dicho valor crítico de resistencia para que $v_{\text{C}}(t)$ en el siguiente circuito sea críticamente amortiguada.

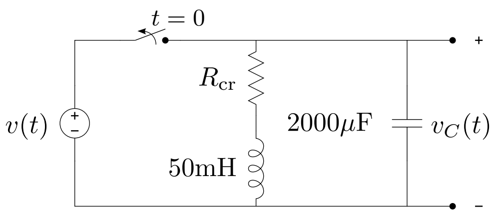


Figura 24: Cálculo de resistencia crítica.

Ejercicio 25.

Se encuentra que las ecuaciones de equilibrio de un circuito de 2° orden son

$$v(t) + 8i(t) + 2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad ; \quad i(t) = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

de donde la respuesta general de corriente es $i(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$. Si $i(0) = 1\text{A}$ y $v(0) = 10\text{V}$, hallar las constantes A y B.

Ejercicio 26.

Determinar la tensión del capacitor de la figura 25 para $t > 0$ si al abrir el interruptor en $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 60°$.

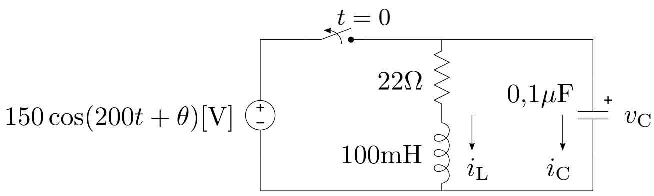


Figura 25: Hallar la tensión del capacitor v_{C}.

Ejercicio 27.

Encontrar la corriente $i_{\mathrm{L}}(t)$ y la tensión $v_{\mathrm{C}}(t)$ del circuito de la figura 26 para todo $t > 0$ según las referencias.

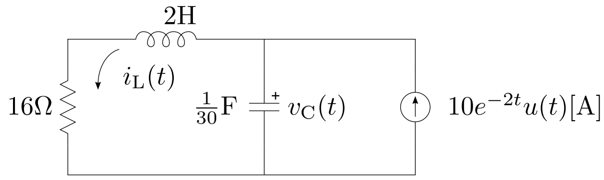


Figura 26: Circuito *RLC* con fuente de corriente.

Ejercicio 28.

Calcular $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$ según la referencia indicada en el circuito de la figura 27.

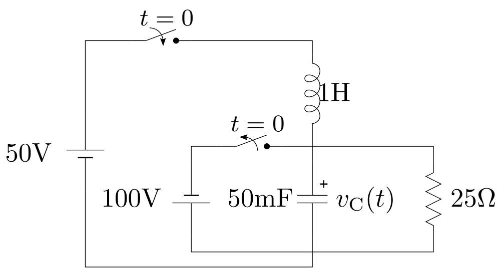


Figura 27: Circuito *RLC* con excitación constante.

Ejercicio 29.

Encontrar la respuesta completa de la tensión $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 28.

Ejercicio 30.

La respuesta natural para $t > 0$ del circuito de la figura 29 es $i_{\mathrm{n}} = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

1. determinar la respuesta completa $i(t) = i_{\mathrm{n}}(t) + i_{\mathrm{f}}(t)$ para $t > 0$
2. particularizar.

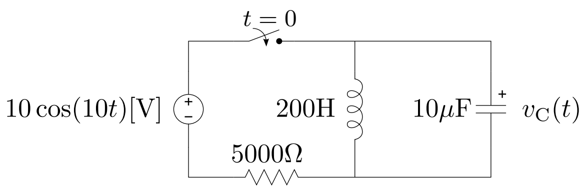


Figura 28: Circuito *RLC* excitado con señal sinusoidal.

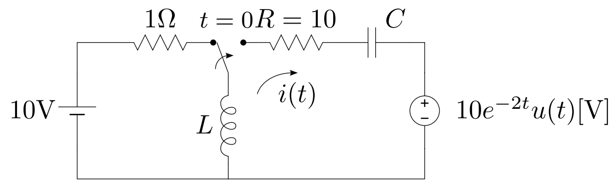


Figura 29: *RLC* en régimen transitorio.

Ejercicio 31.

Para el circuito de la figura 30 encontrar $v_{\mathrm{o}}(t)$ para $t > 0$.

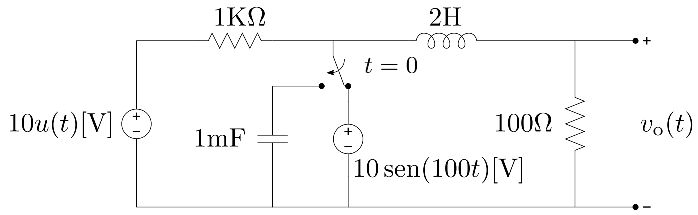


Figura 30: Régimen transitorio en *RLC*.

Ejercicio 32.

En el circuito de la figura 31 se pide:

1. calcular la tensión del capacitor $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$.

2. deducir del circuito cuál es el valor de la tensión del capacitor $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t = 0$ y para $t \to \infty$, verificando que se cumple con estos valores en la expresión de $v_{\mathrm{C}}(t)$ obtenida antes.

Ejercicio 33.

Para el circuito de la figura 32 se pide encontrar $i_{\mathrm{L}}(t) \forall t > 0$.

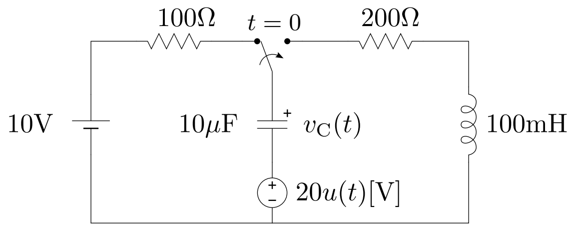


Figura 31: Circuito con respuesta transitoria.

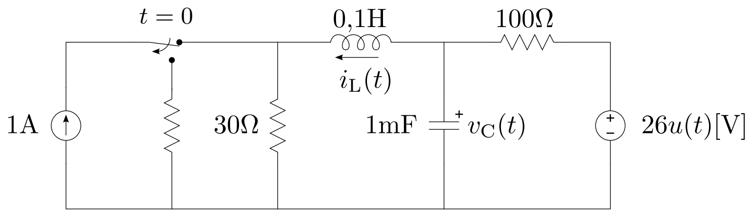


Figura 32: RLC en régimen transitorio.

Ejercicio 34.

Encontrar la tensión $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 33. Calcular la solución numérica con $V = 100$V, $I = 5$A, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $L = 0{,}5$H y $C = 0{,}001$F.

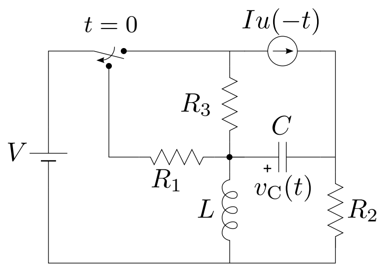


Figura 33: Cálculo de la tensión del capacitor $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$.

Ejercicio 35.

Determinar $i_2(t)$ del circuito de la figura 34 para $t > 0$, siendo $V = 10$V, $R1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 1$H, $L_2 = 4$H y $k = 0{,}6$.

Ejercicio 36.

Determinar $i_1(t)$ del circuito de la figura 34 para $t > 0$, siendo $V = 10$V, $R1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 1$H, $L_2 = 4$H y $k = 0{,}6$.

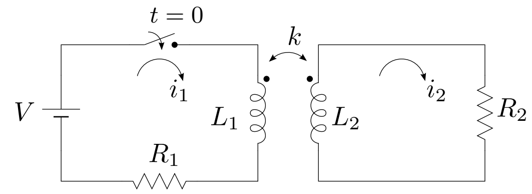


Figura 34: Circuito con acoplamiento inductivo.

Soluciones

Solución 1.

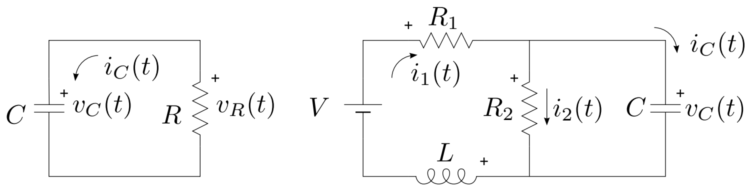
La figura 35a muestra el circuito de la figura 1 para $t > 0$. Según las referencias indicadas la LKV queda

$$v_C(t) - v_R(t) = 0, \tag{2}$$

y la relación tensión-corriente para la resistencia y el capacitor

$$v_R(t) = -Ri_C(t) \tag{3}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$



(a) (b)

Figura 35: Circuitos para el planteo de la respuesta $v_C(t)$.

Luego, reemplazando (3) y (4) en (2), la ecuación diferencial que describe la respuesta de la tensión del capacitor $v_C(t)$ queda

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = 0 \tag{5}$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo. (5) es una ecuación diferencial de primer orden homogénea, cuya solución general es

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau}, \tag{6}$$

que describe la respuesta natural de la tensión del capacitor para $t > 0$. Para particularizar la solución general dada en (6) es necesario conocer las condiciones iniciales del circuito, o sea, para este caso la tensión del capacitor en $t = 0$, $v_C(0)$.

Para el cálculo de la condición inicial del capacitor se analiza el circuito para $t < 0$ de la figura 35b. Aplicando LKV y LKI, y observando que el circuito se encuentra en régimen permanente (es decir que $i_C = 0$ y $v_L = 0$) se tiene

$$\begin{aligned} V - v_{R_1} - v_{R_2} - \cancel{v_L} &= 0 \\ v_{R_2} - v_C &= 0 \\ i_1 - i_2 - \cancel{i_C} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, utilizando las relaciones tensión-corriente en las resistencias $v_{R_1} = R_1 i_1$ y $v_{R_2} = R_2 i_2$, las ecuaciones dadas en (7) queda

$$\begin{aligned} V - R_1 i_1 - R_2 i_2 &= 0 \\ R_2 i_2 - v_C &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $i_1 = i_2$, la tensión del capacitor en $t = 0$ es

$$v_C(0) = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{8}$$

Numéricamente, la constante de tiempo es $\tau = 3\text{s}$, por lo que la solución natural general queda

$$v_C(t) = A e^{-t/3}.$$

Luego, la condición inicial del capacitor es

$$v_C(0) = 80\text{V} \frac{12\text{K}\Omega}{4\text{K}\Omega + 12\text{K}\Omega} = 60\text{V}.$$

Finalmente, la solución particular de la tensión del capacitor es

$$v_C(t) = 60 e^{-t/3} [\text{V}].$$

Solución 3.

La respuesta i_L para $t > 0$ está dada por la ODE que resulta de aplicar LKV a la malla RL (figura 36b). Suponiendo todas caídas de tensión según el sentido de circulación de la corriente, la ecuación de malla será

$$v_{R10} + v_{R10} + v_L = 0 \tag{9}$$

$$R_{eq} i_L + L \frac{\mathrm{d} i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{R_{eq}}{L} i_L + \frac{\mathrm{d} i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{11}$$

donde $R_{eq} = 20\Omega$. Luego la solución general será

$$i_L = A e^{-\frac{R_{eq}}{L} t} \tag{12}$$

Para particularizar esta respuesta general se debe encontrar A. Para esto, analizamos el circuito en el entorno $0^- < t < 0^+$ donde se sabe por condición de continuidad de la corriente en el inductor que

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \tag{13}$$

En $t = 0^-$ la fuente de corriente se encuentra aún conectada al circuito como se muestra la figura 36a, siguiendo las referencias de corriente de la figura la ecuación de nudo queda

$$i_F = i_R + i_L \Rightarrow i_L = i_F \frac{R10}{R10 + R10} = \frac{i_F}{2} \tag{14}$$

debido a que el inductor se encuentra completamente cargado comportandose como un corto circuito. Finalmente la corriente particularizada será

$$i_L = \frac{i_F}{2} e^{-\frac{R_{eq}}{L} t} \tag{15}$$

Haciendo uso ahora de los datos numéricos, la constante de tiempo τ vale

$$\tau = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20} = 500 \cdot 10^{-6}\text{s} \tag{16}$$

y la respuesta particularizada es

$$i_L = 0{,}1 e^{-2000t} [\text{A}] \tag{17}$$

En la figura 36c se muestra la gráfica de i_L.

Solución 4.

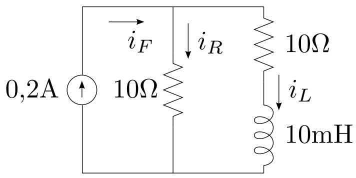
$$t' = 2{,}77\text{s}, \quad \text{R}_\text{x} = 4\text{K}\Omega \tag{18}$$

Solución 5.

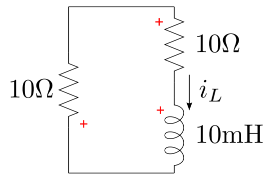
$$i_L(t) = 20 - 17 e^{-200t} [\text{A}] \tag{19}$$

Solución 8.

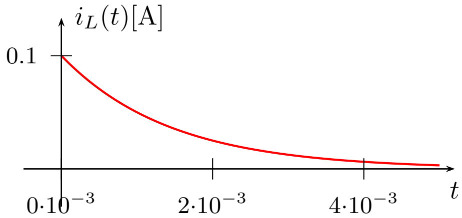
$$v_C(t) = 80 + 120 e^{-25000t} [\text{V}] \tag{20}$$



(a) Circuito para $t < 0$



(b) Circuito para $t > 0$



(c) Gráfica de la corriente i_L

Figura 36: Respuesta de un circuito RL para $t > 0$.

Solución 10.

$$i_L(t) = \left[5 - 5e^{-10t}\right] u(t) + \left[-5 + 5e^{-10(t-0{,}2)}\right] u(t - 0{,}2)[\mathrm{A}] \tag{21}$$

Solución 12.

Teniendo en cuenta las referencias elegidas para tensiones y corriente, se plantea la LKV obteniendose

$$v_{C_1}(t) + v_R(t) + v_{C_2}(t) = 0 \tag{22}$$

por ser todas caídas de tensión. Las tensiones en cada capacitor puede expresarse tambien en términos de la corriente de malla $i(t)$, puesto que

$$v_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i(t)\mathrm{d}t \tag{23}$$

$$v_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int i(t)\mathrm{d}t \tag{24}$$

llevando a (22) y poniendo la tensión en R tambien en función de $i(t)$ queda

$$\frac{1}{C_1} \int i(t)\mathrm{d}t + R\, i(t) + \frac{1}{C_2} \int i(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{25}$$

La (25) es una ecuación integro-diferencial, que para resolverla se debe derivar ambos miembros respecto a t

$$\frac{1}{C_1} i(t) + R\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_2} i(t) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i(t) = 0 \tag{27}$$

el factor $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ se puede reemplazar por un único factor $\frac{1}{C}$ donde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{28}$$

entonces (27) queda

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{RC} = 0 \tag{29}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver separando variables. Multiplicando ambos miembros de (29) por $\mathrm{d}t$, dividiendo por $i(t)$ y luego despejando

$$\frac{\mathrm{d}t}{i(t)}\left(\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{RC}\right) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)} + \frac{i(t)}{RC}\mathrm{d}t = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{32}$$

integrando ambos miembros

$$\int \frac{1}{i(t)}\,\mathrm{d}i(t) = -\int \frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t \tag{33}$$

$$\ln i(t) + K_a = -\frac{1}{RC}\,t + K_b \tag{34}$$

$$\ln i(t) = -\frac{1}{RC}\,t + K_c \tag{35}$$

donde la constante $K_c = K_b - K_a$ agrupa ambas constantes de integración. La (35), por definición de logaritmo, puede ponerse

$$i(t) = e^{-\frac{1}{RC}\,t + K_c} = e^{-\frac{1}{RC}\,t} e^{K_c} \tag{36}$$

$$i(t) = e^{-\frac{1}{RC}\,t}\, K_0 \tag{37}$$

Esta es la solución general de la respuesta $i(t)$ buscada, como se ve es independiente de las cargas iniciales de los capacitores. La constante K_0 permite particularizar la respuesta a cada caso, puesto que en $t = 0$ se ve que $i(0) = K_0$.

En este caso particular, analizando en $t = 0$ la (22)

$$v_{C_1}(0) + v_R(0) + v_{C_2}(0) = 0 \tag{38}$$

como $v_{C_2}(0) = 0$, entonces la corriente inicial será

$$v_{C_1}(0) = -v_R(0) = -i(0)\,R \tag{39}$$

$$i(0) = \frac{-v_{C_1}(0)}{R} \tag{40}$$

La tensión inicial en el capacitor C_1 esta dada por su carga inicial, $v_{C_1}(0) = \frac{-Q_1}{C_1}$. El signo negativo se debe a que la polaridad de la carga inicial es opuesta a la referencia de tensión v_{C_1}. Entonces

$$i(0) = \frac{-\left(\frac{-Q_1}{C_1}\right)}{R} \tag{41}$$

$$i(0) = \frac{Q_1}{RC_1} \tag{42}$$

que es la constante K_0 para este caso particular. Reemplazando finalmente en (37) se obtiene la $i(t)$ particular buscada

$$i(t) = i(0)\,e^{-\frac{1}{RC}\,t} \tag{43}$$

$$i(t) = \frac{Q_1}{RC_1}\,e^{-\frac{1}{RC}\,t} \tag{44}$$

Las caídas de tensión en cada elemento pueden obtenerse de (22), donde

$$v_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1}\int \frac{Q_1}{RC_1}\,e^{-\frac{1}{RC}\,t}\,\mathrm{d}t \tag{45}$$

$$v_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1}\left(-RC\frac{Q_1}{RC_1}\,e^{-\frac{1}{RC}\,t}\right) + K_1 \tag{46}$$

y

$$v_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2}\int \frac{Q_1}{RC_1}\,e^{-\frac{1}{RC}\,t}\,\mathrm{d}t \tag{47}$$

$$v_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2}\left(-RC\frac{Q_1}{RC_1}\,e^{-\frac{1}{RC}\,t}\right) + K_2 \tag{48}$$

Para encontrar K_1 y K_2 se hace $t = 0$, donde $v_{C_1}(0) = \frac{-Q_1}{C_1}$ y $v_{C_2} = 0$

$$v_{C_1}(0) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{-Q_1 C}{C_1}\right) + K_1 = \frac{-Q_1}{C_1} \tag{49}$$

$$K_1 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{Q_1 C}{C_1}\right) - \frac{Q_1}{C_1} \tag{50}$$

$$v_{C_2}(0) = \frac{1}{C_2}\left(\frac{-Q_1 C}{C_1}\right) + K_2 = 0 \tag{51}$$

$$K_2 = \frac{1}{C_2}\left(\frac{Q_1 C}{C_1}\right) \tag{52}$$

Por último, la caída de tensión en R es

$$v_R(t) = R\, i(t) = \frac{Q_1}{C_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\, t} \tag{53}$$

Numéricamente, recordando que $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ se calcula primero el τ del sistema

$$\tau = RC = 20\, \frac{6 \times 10^{-6}\, 3 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6} + 3 \times 10^{-6}} = 40 \times 10^{-6}\mathrm{s} \tag{54}$$

Reemplazando ahora en (46) por los datos numéricos

$$i(t) = \frac{300 \times 10^{-6j}}{20 \cdot 6 \times 10^{-6}} e^{-2{,}5\times10^{4}t} \tag{55}$$

$$i(t) = 2{,}5 e^{-2{,}5\times10^{4}t}[\mathrm{A}] \tag{56}$$

Luego las constantes K_1 y K_2 de las tensiones (ecuaciones (50) y (52))

$$K_1 = \frac{1}{6 \times 10^{-6}} \left(\frac{300 \times 10^{-6} \cdot 2 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} \right) - \frac{300 \times 10^{-6j}}{6 \times 10^{-6}} \tag{57}$$

$$K_1 = -33{,}333 \tag{58}$$

$$K_2 = \frac{1}{3 \times 10^{-6}} \left(\frac{300 \times 10^{-6} \cdot 2 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} \right) \tag{59}$$

$$K_2 = 33{,}333 \tag{60}$$

con estas constantes se obtienen las caídas de tensión v_{C_1} y v_{C_2} (ecuaciones (46) y (48))

$$v_{C_1}(t) = \frac{1}{6 \times 10^{-6}} \left(-40 \times 10^{-6} \frac{300 \times 10^{-6}}{20 \cdot 6 \times 10^{-6}}\, e^{-2{,}5\times10^{4}t} \right) - 33{,}333 \tag{61}$$

$$v_{C_1}(t) = -16{,}667\, e^{-2{,}5\times10^{4}t} - 33{,}333 \tag{62}$$

$$v_{C_2}(t) = \frac{1}{3 \times 10^{-6}} \left(-40 \times 10^{-6} \frac{300 \times 10^{-6}}{20 \cdot 6 \times 10^{-6}}\, e^{-2{,}5\times10^{4}t} \right) + 16,667 \tag{63}$$

$$v_{C_2}(t) = -33{,}333\, e^{-2{,}5\times10^{4}t} + 33{,}333[\mathrm{V}] \tag{64}$$

y finalmente la caída en R (ecuación (53))

$$v_R(t) = \frac{300 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} e^{-2{,}5\times10^{4}t} \tag{65}$$

$$v_R(t) = 50 e^{-2{,}5\times10^{4}t}[\mathrm{V}] \tag{66}$$

En la figura 37 se grafican las tres tensiones dadas por (62), (64) y (66) y la corriente (56).

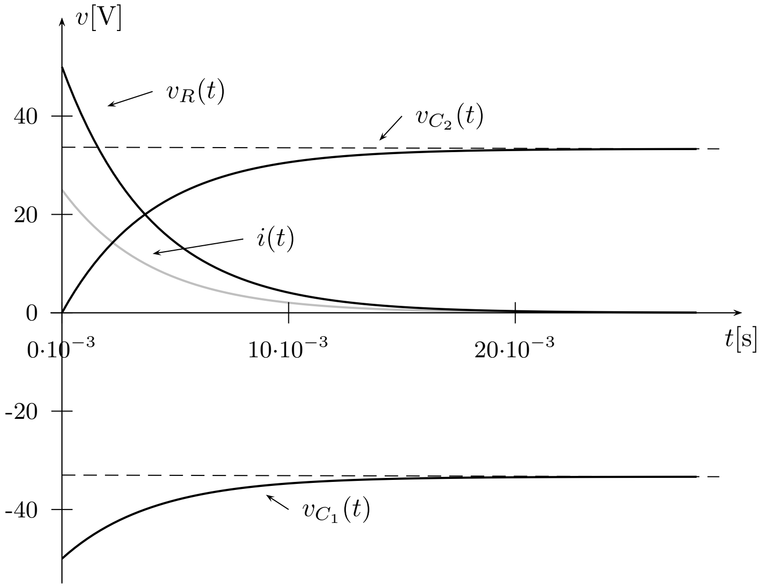


Figura 37: Caídas de tensión en cada elemento y corriente total del ejercicio .

Solución 15.

$$i(t) = 8 - 8e^{-5t} + 10e^{-t/2}[\mathrm{A}] \tag{67}$$

Solución 16.

Dadas las referencias de tensiones y corrientes del circuito de la figura 38, las ecuaciones de Kirchhoff son

$$v_C - v_R = 0 \tag{68}$$
$$i - i_C - i_R = 0, \tag{69}$$

y las relaciones tensión-corrientes de los elementos

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}, \quad v_R = Ri_R. \tag{70}$$

Luego, operando se obtiene la ecuación diferencia de la tensión del capacitor

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{i(t)}{C}. \tag{71}$$

Dado que en la ecuación diferencial (71) la función de excitación es variable en el tiempo se aplica la solución por el método de Lagrange viene dada por

$$v_C(t) = Ke^{-t/\tau} + e^{-t/\tau}\int e^{t/\tau}y(t)\,\mathrm{d}t, \tag{72}$$

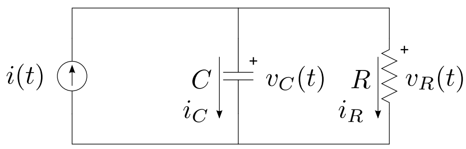


Figura 38: Encontrar $v_C(t)$ para $t > 0$.

donde τ es la constante de tiempo, y la función de excitación $y(t) = i(t)/C$. La solución (72) representa la solución completa general, la cual se debe particularizar según la condición inicial de la tensión del capacitor.

La ecuación diferencia (71), dados los valores de los elementos del circuito, queda

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + 5v_C(t) = 1000\,\mathrm{sen}(100\pi t), \tag{73}$$

con la constante de tiempo $\tau = RC = 0{,}2$s. La solución de Lagrange será

$$v_C(t) = Ke^{-5t} + 1000e^{-5t}\int e^{5t}\,\mathrm{sen}(100\pi t)\,\mathrm{d}t. \tag{74}$$

Para resolver la integral de la solución de Lagrange de (74) se debe realizar la integración por partes dos veces, con lo cual

$$\int e^{5t}\,\mathrm{sen}(100\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{5t}\,(5\,\mathrm{sen}(100\pi t) - 100\pi\cos(100\pi t))}{(100\pi)^2 + 5^2}. \tag{75}$$

Entonces, la solución completa general de la tensión del capacitor queda

$$v_C(t) = Ke^{-5t} + \frac{5000}{(100\pi)^2 + 5^2}\,\mathrm{sen}(100\pi t) - \frac{100000\pi}{(100\pi)^2 + 5^2}\cos(100\pi t)[V] \tag{76}$$

$$v_C(t) = Ke^{-5t} + 0{,}051\,\mathrm{sen}(100\pi t) - 3{,}2\cos(100\pi t)[V]. \tag{77}$$

Como último paso queda particularizar la solución general, en la cual se asume que la tensión del capacitor para $t = 0$ antes de conmutar la llave como $v_C(t = 0^-) = 0$. Luego, para determinar la constante C de (77), y considerando la condición de continuidad de la tensión que $v_C(t = 0^-) = v_C(t = 0^+) = 0$, se tiene

$$v_C(0^+) = K - 3{,}2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad K = 3{,}2. \tag{78}$$

Finalmente, la solución completa particular de la tensión de capacitor queda

$$v_C(t) = 3{,}2e^{-5t} + 0{,}051\,\mathrm{sen}(100\pi t) - 3{,}2\cos(100\pi t)[V]. \tag{79}$$

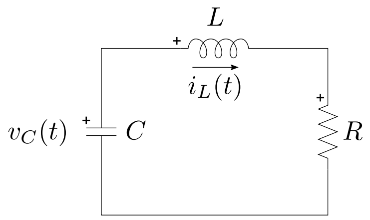


Figura 39: Circuito para $t > 0$ para el cálculo de la respuesta natural.

Solución 20.

$$v_C(0^+) = 75\text{V}, \qquad v_L(0^+) = -30{,}72\text{V} \tag{80}$$
$$i_C(0^+) = -4{,}8\text{A}, \quad i_L(0^+) = 4{,}8\text{A} \tag{81}$$

Solución 23.

El circuito dado en la figura 23 para $t > 0$ se muestra en la figura 39. Aplicando la LKV de la malla dadas las referencias indicadas, se tiene

$$v_C(t) - v_L(t) - v_R(t) = 0. \tag{82}$$

Además, las relaciones entre la corriente y las diferentes caídas de tensiones en los elementos son

$$v_R(t) = Ri_L(t) \tag{83}$$
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{84}$$
$$i_L(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{85}$$

Reemplazando (83) y (84) en (82), se tiene

$$v_C(t) - L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} - Ri_L(t) = 0. \tag{86}$$

La ecuación (86) junto a (85) forman el sistema de ecuaciones diferenciasles de primer orden a resolver, o sistema *acoplado*, cuyas incógnitas son $i_L(t)$ y $v_C(t)$.

A partir del sistema de ecuaciones diferencias de primer orden ((85) y (86)) se puede plantear la ecuación diferencial de segundo orden en términos de $v_C(t)$ o bien $i_L(t)$. La ecuación diferencial en términos de la tensión del capacitor se obtiene de reemplazar (85) en (86), y queda

$$\frac{\mathrm{d}^2v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v_C(t) = 0. \tag{87}$$

La ecuación diferencial en términos de la corriente del inductor se obtiene de despejar $v_C(t)$ de (86) y reemplazarlo en (85), y queda

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0. \tag{88}$$

Las ecuaciones (87) y (88) son ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas, con iguales coeficientes, como es de esperar.

Resolviendo la tensión del capacitor a partir de (87) la corriente del inductor se puede calcular de (85). O bien, resolviendo la corriente del inductor de (88) la tensión del capacitor se puede calcular de (86).

La solución homogénea general de (87) es

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \tag{89}$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación características dada por

$$s^2 + ps + q = 0, \tag{90}$$

con $p = R/L$ y $q = 1/LC$. En (89) los coeficientes A_1 y A_2 determinan la solución particular de la tensión del capacitor y se calculan a partir de la condición inicial de la tensión del capacitor y corriente del inductor.

Dada la tensión del capacitor a $t = 0$, valuando la solución dada en (89), se tiene

$$A_1 + A_2 = v_C(0), \quad \text{con} \quad v_C(0) = v_C(0^-) = v_C(0^+), \tag{91}$$

lo cual fija el valor de tensión del capacitor a comienzo del régimen transitorio. Luego, la corriente del inductor determina la derivada de la tensión del capacitor en dicho punto. De (85) valuada en $t = 0$ se tiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\frac{i_L(0)}{C}, \quad \text{con} \quad i_L(0) = i_L(0^-) = i_L(0^+). \tag{92}$$

De (92) y (89) se tiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{i_L(0)}{C}. \tag{93}$$

Por último, conociendo las condiciones iniciales de ambos elementos, se obtiene A_1 y A_2 a partir de (91) y (93).

Dados los valores de R, L y C, la ecuación característica dada por (90) es

$$s^2 + 2s + 10 = 0, \tag{94}$$

cuyas raíces son $s_{1,2} = -1 \pm j3$, por lo que la respuesta es subamortiguada. Luego, la solución general de la ecuación diferencial (87) dada en (89) es

$$v_C(t) = A_1 e^{(-1+j3)t} + A_2 e^{(-1-j3)t}, \tag{95}$$

o bien

$$v_C(t) = e^{-t}\left(B_1\cos(3t) + B_2\operatorname{sen}(3t)\right), \tag{96}$$

que es la respuesta natural.

Para obtener la solución particular se utilizan los valores de las condiciones iniciales $v_C(0) = 10$V y $i_L(t) = 0$A. Las condiciones ajustan tanto la magnitud como la derivada de (96) para $t = 0$. Valuando (96) en $t = 0$ se tiene que $B_1 = 10$, y

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -10 + 3B_2 = 0, \tag{97}$$

por lo que $B_2 = \frac{10}{3}$. Por lo tanto, la respuesta natural de la tensión del capacitor particular es

$$v_C(t) = e^{-t}\left(10\cos(3t) + \frac{10}{3}\operatorname{sen}(3t)\right)[\mathrm{V}]. \tag{98}$$

Y la corriente del inductor, usando (85), es

$$i_L(t) = (-0{,}1)\left(-e^{-t}(10\cos(3t) + \frac{10}{3}\operatorname{sen}(3t)) + e^{-t}(-30\operatorname{sen}(3t) + 10\cos(3t))\right),$$

$$i_L(t) = (-0{,}1)\left(-e^{-t}\frac{10}{3}\operatorname{sen}(3t) + e^{-t}(-30)\operatorname{sen}(3t)\right),$$

$$i_L(t) = e^{-t}\frac{10}{3}\operatorname{sen}(3t)[\mathrm{A}]. \tag{99}$$

En las soluciones dadas por (98) y (99) se verifican las condiciones iniciales.

Solución 24.

Para $t > 0$ la suma de las tensiones en la malla es

$$v_C(t) + v_L(t) + v_{R_c}(t) = 0 \tag{100}$$

$$v_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_c i(t) = 0 \tag{101}$$

la corriente en la malla $i(t)$ con respecto a la tensión en el capacitor es

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} \tag{102}$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{103}$$

reemplazando la (102) y la (103) en (101) nos queda solo en función de $v_C(t)$

$$v_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + R_c C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{104}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_c}{L}\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v_C(t) = 0 \tag{105}$$

la ecuación característica de esta ecuación diferencial es de la forma

$$s^2 + ps + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s_{1-2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}. \tag{106}$$

Para una respuesta criticamente amortiguada el discriminante de esta última ecuación debe ser cero, entonces debe ser

$$p^2 = 4q \tag{107}$$

$$\left[\frac{R_c}{L}\right]^2 = 4\frac{1}{LC} \tag{108}$$

$$R_c^2 = 4\frac{L}{C} \tag{109}$$

Reempalzando los valores de capacidad e inductancias según los datos

$$R_c^2 = 4\frac{50 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 100 \tag{110}$$

de donde finalmente

$$R_c = 10\Omega. \tag{111}$$

Solución 27.

$$i_L(t) = 25e^{-5t} - 75e^{-3t} + 50e^{-2t}\mathrm{A} \tag{112}$$

$$v_C(t) = 150^{-5t} - 750^{-3t} + 600e^{-2t}\mathrm{V} \tag{113}$$

Solución 35.

A partir de las referencias del circuito de la figura 40 las ecuaciones que resultan de aplicar la Ley de Kirchhoff de tensiones en ambas mallas son

$$V - v_{\mathrm{L}_1} - v_{\mathrm{R}_1} = 0 \tag{114}$$

$$v_{\mathrm{L}_2} - v_{\mathrm{R}_2} = 0, \tag{115}$$

y la relación tensión-corriente en cada elemento

$$v_{\mathrm{R}_1} = R_1 i_1 \tag{116}$$

$$v_{\mathrm{R}_2} = R_2 i_2 \tag{117}$$

$$v_{\mathrm{L}_1} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{118}$$

$$v_{\mathrm{L}_2} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{119}$$

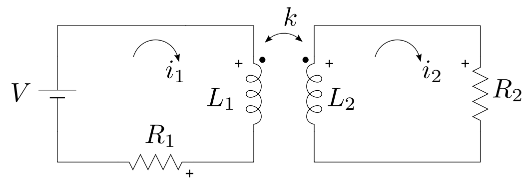


Figura 40: Circuito para $t > 0$.

Luego, reemplazando (116)-(119) en (114) y (115), se tiene

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = V \tag{120}$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{121}$$

Las ecuaciones (120) y (121) conforman el sistema de ecuaciones diferenciales que modelan el circuito dado, a partir del cual se pueden calcular las corrientes incógnitas i_1 e i_2. Para obtener la ecuación diferencial de segundo orden de la corriente $i_2(t)$ se procede de la siguiente manera. De (121) se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{R_2}{M} i_2 + \frac{L_2}{M} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{122}$$

que llevada a (120)

$$\frac{L_1 R_2}{M} i_2 + \frac{L_1 L_2}{M} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = 0, \tag{123}$$

luego, derivando

$$\frac{L_1 R_2}{M} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{L_1 L_2}{M} \frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} - M \frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + R_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{124}$$

y volviendo a reemplazar (122) en el último término, se tiene

$$\frac{L_1 R_2}{M} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{R_1 L_2}{M} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{125}$$

de la cual se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden buscada

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_1 L_2 + L_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} i_2 = 0. \tag{126}$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden homogénea (126) es

$$i_2(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \tag{127}$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación características $s^2 + ps + q = 0$, donde

$$p = \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad q = \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2}. \tag{128}$$

Una vez obtenida la solución general, se debe obtener la solución particular a partir de las condiciones iniciales del circuito, en este caso $i_1(0) = i_2(0) = 0$, las cuales determinan el valor de la solución y el de su derivada en $t = 0$.

Con los valores de los parámetros del circuito se tiene que $p = 6{,}25$ y $q = 4{,}6875$, por lo tanto las raíces de la ecuación características son $s_1 = -0{,}87$ y $s_2 = -5{,}38$. Entonces, la solución general de la corriente queda

$$i_2(t) = A_1 e^{-0{,}87t} + A_2 e^{-5{,}38t} [\mathrm{A}]. \tag{129}$$

Para obtener la solución particular, y utilizando la condición de continuidad de la corriente, se tiene que

$$i_2(0) = A_1 + A_2 = 0, \tag{130}$$

lo cual restringe los valores de las constantes A_1 y A_2 de forma tal que el valor de la solución en $t = 0$ sea nulo. Luego, de (123) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{VM - L_1R_2i_2 - R_1Mi_1}{L_1L_2 - M^2}, \tag{131}$$

que valuando en $t = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{VM - L_1R_2\cancel{i_2(0)} - R_1M\cancel{i_1(0)}}{L_1L_2 - M^2} = \frac{VM}{L_1L_2 - M^2} = 4{,}6875 \tag{132}$$

que es el valor que debe tener la derivada de la solución en $t = 0$ para cumplir con las condiciones iniciales del circuito.

Entonces, tomando la derivada de la solución general (129) y valuando en $t = 0$, se tiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -0{,}87A_1 - 5{,}38A_2 = 4{,}6875 \tag{133}$$

que determina la segunda ecuación para el cálculo de las constantes A_1 y A_2 a partir del dato de la derivada de la solución en $t = 0$.

Luego, de (130) y (133) se tiene que

$$A_1 + A_2 = 0 \tag{134}$$

$$-0{,}87A_1 - 5{,}38A_2 = 4{,}6875 \tag{135}$$

de donde $A_1 = 1{,}04$ y $A_2 = -1{,}04$.

Finalmente, la solución particular de la corriente $i_2(t)$ queda

$$i_2(t) = 1{,}04e^{-0{,}87t} - 1{,}04e^{-5{,}38t} [\mathrm{A}]. \tag{136}$$