Guia 4. Transformada de Laplace

Ejercicio 1.

Encontrar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{-\alpha t}\left[A\,\mathrm{sen}(\omega t) + Bcos(\omega t)\right]. \tag{1}$$

Ejercicio 2.

Encontrar la transformada de Laplace de $g(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$ si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Ejercicio 3.

Transformar al dominio de la variable s la función excitación mostrada en la figura 1.

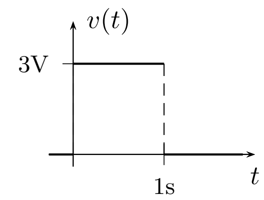


Figura 1: Excitación pulso

Ejercicio 4.

Transformar las relaciones tensión-corriente del inductor y capacitor del dominio del tiempo al dominio de Laplace, y armar el circuito equivalente serie y paralelo que representan las ecuaciones transformadas.

Ejercicio 5.

En $t = 0$ se aplica al circuito RL serie de la figura 2 una tensión continua de 55V. Encontrar la transformada de la respuesta $i(t)$ para $t > 0$.

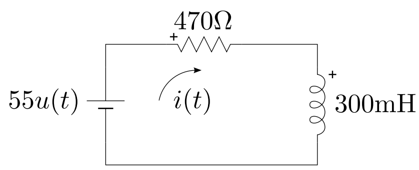


Figura 2: Circuito RL serie con excitación constante.

Ejercicio 6.

El capacitor de la figura 3 tiene una carga inicial de $q_0 = 800 \times 10^{-6}$C con la polaridad indicada. Hallar la respuesta completa de la tensión del capacitor en el dominio de la variable s.

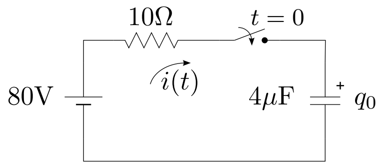


Figura 3: Circuito RC.

Ejercicio 7.

La respuesta de corriente de un circuito eléctrico tiene la siguiente transformada

$$I(s) = \frac{\frac{4}{5}}{\left(\frac{s}{5}+1\right)^2+4},$$

se pide:

1. encontrar $i(t)$,
2. encontrar el valor de $i(0)$ aplicando el teorema del valor inicial y comprobar en el tiempo,
3. encontrar el valor de $i(\infty)$ aplicando el teorema del valor final y comprobar en el tiempo.

Ejercicio 8.

Si la corriente que atraviesa un capacitor de $C = 2{,}5\mathrm{mF}$ en el dominio de s es

$$I_{\mathrm{C}}(s) = \frac{5}{s+200}, \tag{2}$$

se pide:

1. encontrar $V_{\mathrm{C}}(s)$ si $v_{\mathrm{C}}(0) = 10\mathrm{V}$,
2. calcular y gaficar $v_{\mathrm{C}}(t)$ e $i_{\mathrm{C}}(t)$,
3. deducir cuál puede ser la topología más simple de circuito según estos datos y calcular el τ.

Ejercicio 9.

Encontrar la tensión del capacitor $V_{\mathrm{C}}(s)$ si tiene una carga inicial de 12V con la polaridad indicada en la figura 4.

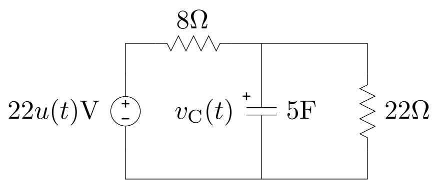
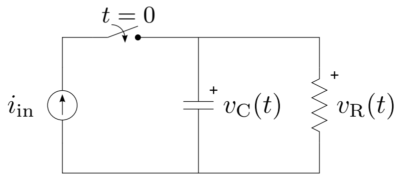


Figura 4: Cálculo de $V_{\mathrm{C}}(s)$.



<u>Datos</u>

$i_{\mathrm{in}} = 10\,\mathrm{sen}(2\pi 50t)[\mathrm{A}]$

$C = 10000\mu\mathrm{F}$

$R = 20\Omega$

Figura 5: Circuito RC paralelo.

Ejercicio 10.

En el circuito de la figura 5 encontrar la respuesta $v_{\mathrm{C}}(t)$ para $t > 0$ utilizando la transformada de Laplace como herramienta. La tensión inicial sobre el capacitor es cero.

Ejercicio 11.

Encontrar la respuesta completa de tensión en el capacitor y corriente en el inductor para $t > 0$ del circuito de la figura 6, indicando el tipo de amortiguamiento del sistema. Verificar por teorema de valor inicial y final que se cumplen con las condiciones iniciales y finales impuestas por el circuito.

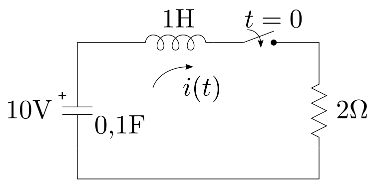


Figura 6: Cálculo de la respuesta natural de tensión y corriente.

Ejercicio 12.

Para el circuito de la figura 7 plantear el sistema de ecuaciones en términos de $I_{\mathrm{L}}(s)$ y $V_{\mathrm{C}}(s)$ en el dominio de Laplace, con $I_{\mathrm{L}}(s) = \mathcal{L}[i_{\mathrm{L}}(t)]$ y $V_{\mathrm{C}}(s) = \mathcal{L}[v_{\mathrm{C}}(t)]$.

Ejercicio 13.

Aplicando la transformada de Laplace, calcular $v_{\mathrm{C}}(t) \forall t > 0$ según la referencia indicada en el circuito de la figura 8.

Ejercicio 14.

Encontrar la respuesta completa de tensión en el capacitor y corriente en el inductor para $t > 0$ del circuito de la figura 9, si $i(t) = 10e^{-2t}u(t)[\mathrm{A}]$.

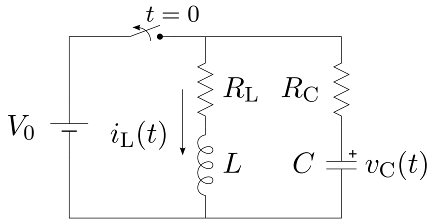


Figura 7: Sistema de segundo orden.

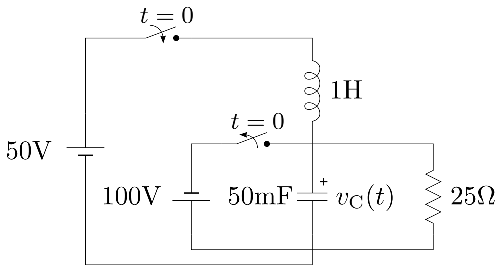


Figura 8: Circuito *RLC* con excitación constante.

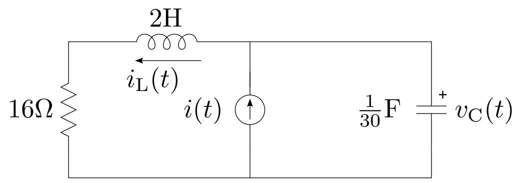


Figura 9: Circuito de segundo orden con excitación no constante.

Ejercicio 15.

Para el circuito de la figura 10 se pide encontrar $I_{\mathrm{L}}(s)$ y $i_{\mathrm{L}}(t)$ para $t > 0$.

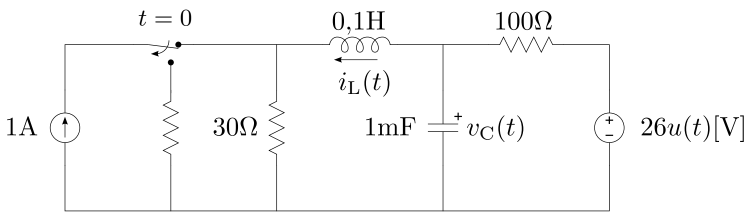


Figura 10: *RLC* en régimen transitorio.

Ejercicio 16.

Para el circuito de la figura 11 se pide encontrar la corriente $i_1(t)$. Para mayor facilidad de cálculo se aconseja utilizar las variables de estado físicas del circuito para el planteo.

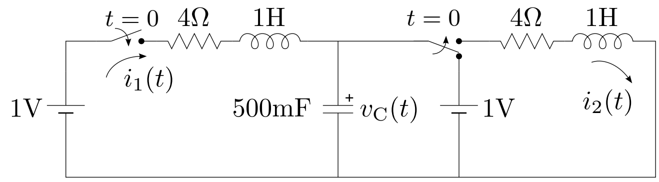


Figura 11: Circuito RLC.

Ejercicio 17.

Dado el circuito de la figura 12 en el dominio de s.

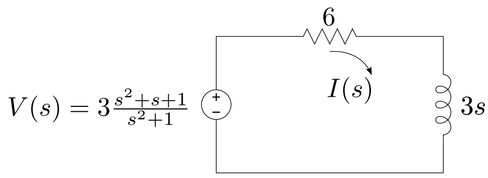


Figura 12: Dominio de s.

- Encontrar $I(s)$ y su correspondiente $i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)]$
- Tiene el circuito condición inicial no nula? Verificar utilizando el TVI.
- Encontrar $V_{\mathrm{L}}(s)$.

Ejercicio 18.

Un circuito RL serie tiene como función de transferencia

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{36 + s18}. \tag{3}$$

Si se lo excita con un escalón $v(t) = 36u(t)[\mathrm{V}]$, encontrar por convolución la respuesta $i(t) = h(t) * v(t)$.

Ejercicio 19.

Aplicando transformada de Laplace, encontrar $i_{\mathrm{L}}(t)$ y $v_{\mathrm{C}}(t)$ según se indica en el circuito de la figura 13.

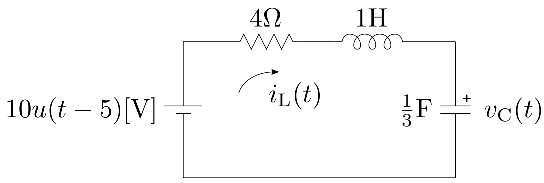


Figura 13: Circuito RLC desplazado.

Ejercicio 20.

Un sistema es excitado con una señal de entrada $v_{\text{in}}(t) = e^{-2t}[\text{V}]$. Se encuentra que la corriente de salida vale $i_{\text{out}}(t) = \frac{4}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right)[\text{A}]$. Calcular la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

Ejercicio 21.

La corriente de excitación del circuito de la figura 14 es $i(t) = 10e^{-2t}u(t)[\text{A}]$, se pide calcular:

1. la función de transferencia $H(s)$ definida como
$$H(s) = \frac{V_{\text{C}}(s)}{I(s)},$$
con $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$ y $V_{\text{C}}(s) = \mathcal{L}[v_{\text{C}}(t)]$
2. y la transformada inversa $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$.

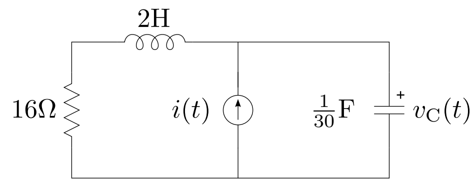


Figura 14: Función de transferencia $H(s)$ y respuesta al impulso $h(t)$.

Ejercicio 22.

Obtener la respuesta al impulso del circuito de la figura 15 considerando $H(s) = \frac{I_{\text{R}}(s)}{V(s)}$; donde $I_{\text{R}}(s) = \mathcal{L}[i_{\text{R}}(t)]$ y $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$.

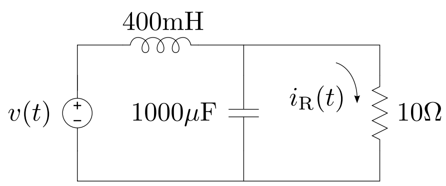


Figura 15: Cálculo de respuesta al impulso.

Ejercicio 23.

Aplicando transformada de Laplace encontrar la tensión $v_{\text{o}}(t)$ indicada en el circuito de la figura 16.

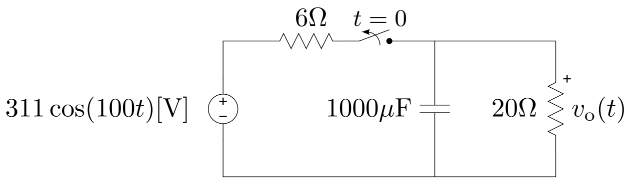


Figura 16: Tensión de salida.

Ejercicio 24.

Para el circuito de la figura 17 de condiciones iniciales $i_\mathrm{L}(0) = 1[\mathrm{A}]$ y $v_\mathrm{C}(0) = 1[\mathrm{V}]$ se pide:

1. encontrar la respuesta completa de corriente $i(t)$ para $t > 0$ utilizando el modelo de circuito equivalente de Laplace,
2. decir que parte de la respuesta corresponde a la natural y cuál es la forzada.

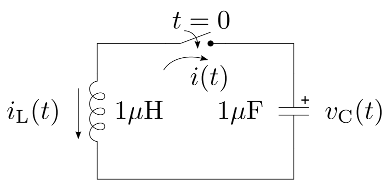


Figura 17: Equivalente de Laplace.

Ejercicio 25.

Aplicando la transformada de Laplace, determinar $i_1(t)$ y $i_2(t)$ del circuito de la figura 18 para $t > 0$, siendo $V = 10\mathrm{V}$, $R1 = 3\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $L_1 = 1\mathrm{H}$, $L_2 = 4\mathrm{H}$ y $k = 0{,}6$.

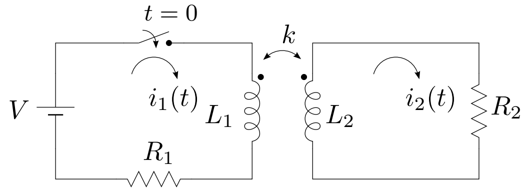


Figura 18: Circuito con acoplamiento inductivo.

Soluciones

Solución 1.

$$F(s) = \frac{A\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \frac{B(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \tag{4}$$

Solución 3.

$$F(s) = \frac{3-3e^{-s}}{s} \tag{5}$$

Solución 5.

Según la LKV, la malla debe cumplir[1]

$$55u(t) = 470i(t) + 300\times 10^{-3}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Aplicando la transformada a ambos miembros tenemos

$$\mathcal{L}\left[55u(t)\right] = 470\mathcal{L}[i(t)] + 300\times 10^{-3}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{7}$$

$$\frac{55}{s} = 470I(s) + 300\times 10^{-3}\left(sI(s)-i(0)\right) \tag{8}$$

la corriente inicial del circuito es $i(0)=0$ debido al inductor. Despejando $I(s)$ queda

$$I(s) = \frac{55}{s}\left(\frac{1}{470+300\times 10^{-3}s}\right) \tag{9}$$

$$I(s) = \frac{183{,}33}{s(s+1566{,}66)}. \tag{10}$$

Solución 6.

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{80}{s} + \frac{120}{s+25000} \tag{11}$$

[1] La función $u(t)$ representa la aplicación de la fuente en el tiempo $t=0$.

Solución 7.

1. $i(t) = 2e^{-5t}\,\mathrm{sen}(10t)$
2. $i(0) = \mathrm{lím}_{s\to\infty} sI(s) = 0$
3. $i(\infty) = \mathrm{lím}_{s\to 0} sI(s) = 0$

Solución 10.

Por LKC en el nudo tenemos

$$i_{\mathrm{in}}(t) - i_{\mathrm{C}}(t) - i_{\mathrm{R}}(t) = 0 \tag{12}$$

$$i_{\mathrm{in}}(t) = i_{\mathrm{C}}(t) + i_{\mathrm{R}}(t) \tag{13}$$

$$i_{\mathrm{in}}(t) = C\frac{\mathrm{d}(v_{\mathrm{C}}(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\mathrm{R}}(t)}{R} \tag{14}$$

como $v_{\mathrm{C}}(t) = v_{\mathrm{R}}(t)$ por ser un circuito paralelo, ponemos la ecuación en función de la respuesta $v_{\mathrm{C}}(t)$

$$i_{\mathrm{in}}(t) = C\frac{\mathrm{d}(v_{\mathrm{C}}(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\mathrm{C}}(t)}{R} \tag{15}$$

Aplicando $\mathcal{L}[\,]$ a ambos miembros

$$I_{\mathrm{in}}(s) = sCV_{\mathrm{C}}(s) - Cv_{\mathrm{C}}(0) + \frac{V_{\mathrm{C}}(s)}{R} \tag{16}$$

$$I_{\mathrm{in}}(s) + Cv_{\mathrm{C}}(0) = V_{\mathrm{C}}(s)\left(sC + \frac{1}{R}\right) \tag{17}$$

de donde despejamos $V_{\mathrm{C}}(s)$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{I_{\mathrm{in}}(s)}{sC + \frac{1}{R}} + \frac{Cv_{\mathrm{C}}(0)}{sC + \frac{1}{R}}. \tag{18}$$

Resolviendo numéricamente, para poder operar con (18) calculamos primero

$$I_{\mathrm{in}}(s) = \mathcal{L}\left[10\,\mathrm{sen}(2\pi 50t)\right] = 10\frac{100\pi}{s^2 + (100\pi)^2} \tag{19}$$

y reemplazando tenemos

$$V_{\mathrm{C}}(s) = 10\left(\frac{100\pi}{s^2 + (100\pi)^2}\right)\left(\frac{1}{s0{,}01 + \frac{1}{20}}\right) \tag{20}$$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = 1000\left(\frac{100\pi}{s^2 + (100\pi)^2}\right)\left(\frac{1}{s+5}\right) \tag{21}$$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{A}{s + j100\pi} + \frac{A^*}{s - j100\pi} + \frac{B}{s+5}. \tag{22}$$

Para calcular A hacemos primero

$$A = \lim_{s\to -j100\pi} 1000\frac{100\pi}{(s-j100\pi)(s+5)} \tag{23}$$
$$A = -1{,}5911 + j0{,}025 \tag{24}$$
$$A = 1{,}5913 e^{j179^\circ}, \tag{25}$$

luego para calcular B

$$B = \lim_{s\to -5} 1000\frac{100\pi}{s^2+(100\pi)^2} \tag{26}$$
$$B = 3{,}1823. \tag{27}$$

Reemplazando en (22) tenemos

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{1{,}5913 e^{j179^\circ}}{s+j100\pi} + \frac{1{,}5913 e^{-j179^\circ}}{s-j100\pi} + \frac{3{,}1823}{s+5}. \tag{28}$$

Cada término de la ecuación anterior tiene antitransformada conocida, quedando la $v_{\mathrm{C}}(t)$ igual a

$$v_{\mathrm{C}}(t) = 1{,}5913 e^{j179^\circ} e^{-j100\pi t} + 1{,}5913 e^{-j179^\circ} e^{j100\pi t} + 3{,}1823 e^{-5t} \tag{29}$$

utilizando la igualdad de *Euler*

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \tag{30}$$

nos queda

$$v_{\mathrm{C}}(t) = 3{,}1826\left[\frac{e^{j(100\pi t - 179^\circ)} + e^{-j(100\pi t - 179^\circ)}}{2}\right] + 3{,}1823 e^{-5t} \tag{31}$$
$$v_{\mathrm{C}}(t) = 3{,}1826\cos(100\pi t - 179^\circ) + 3{,}1823 e^{-5t} \tag{32}$$
$$v_{\mathrm{C}}(t) = 3{,}1826\,\mathrm{sen}(100\pi t - 89^\circ) + 3{,}1823 e^{-5t} \tag{33}$$

que se grafica en la figura 19.

Solución 11.

Según las referencias de la figura 20 la ecuación de equilibrio de la malla aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones es

$$v_{\mathrm{C}}(t) - v_{\mathrm{L}}(t) - v_{\mathrm{R}}(t) = 0, \tag{34}$$

y las relaciones tensión-corriente de cada elemento

$$v_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_{\mathrm{R}}(t) = Ri_{\mathrm{L}}(t), \quad i_{\mathrm{C}}(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{35}$$

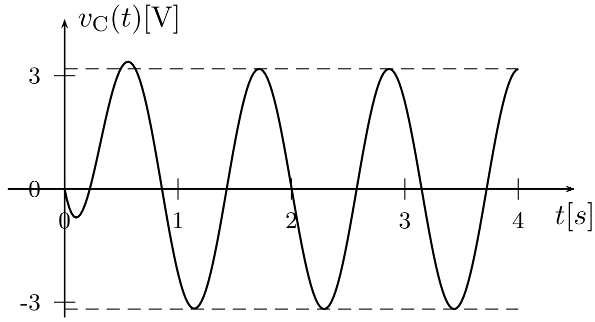


Figura 19: Caída de tensión en el capacitor del ejercicio .

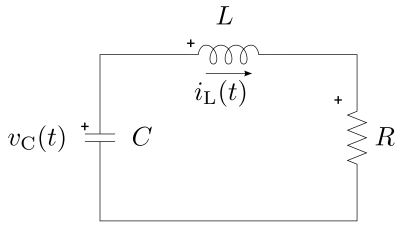


Figura 20: Cálculo de la respuesta natural de tensión y corriente.

Reemplazando (35) en (34), el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que modela el sistema resulta

$$v_C(t) - L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} - Ri_L(t) = 0 \tag{36}$$

$$i_L(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{37}$$

Luego, tomando la transformada de Laplace de (36) y (37), el sistema de ecuaciones algebraicas en el dominio de la variable s queda

$$I_L(s)(sL + R) - V_C(s) = 0 \tag{38}$$

$$I_L(s) + sCV_C(s) = Cv_C(0), \tag{39}$$

donde se ha considerado que $i_L(0) = 0$A. El sistema de ecuaciones (38)-(39) puede ponerse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} sL + R & -1 \\ 1 & sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Cv_C(0) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Por último, se resuelve el sistema dado en (40) mediante Cramer como

$$I_L(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad V_C(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{41}$$

donde Δ es el determinate de la matriz principal de (40), y Δ_1 y Δ_2 son los determinantes de la matrices sustitutas 1 y 2, respectivamente.

Numéricamente, el determinante de la matriz principal de (40) queda

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} sL+R & -1 \\ 1 & sC \end{vmatrix} = sC(sL+R)+1 = LCs^2+RCs+1 \\ &= 0{,}1(s^2+2s+10),\end{aligned}$$

el determinante sustituto 1 queda

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ Cv_{\mathrm{C}}(0) & sC \end{vmatrix} = -v_{\mathrm{C}}(0)C = 1,$$

y el determinate sustituto 2

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} sL+R & 0 \\ 1 & Cv_{\mathrm{C}}(0) \end{vmatrix} = Cv_{\mathrm{C}}(0)(sL+R) = LCv_{\mathrm{C}}(0)s + v_{\mathrm{C}}(0)RC \\ &= s+2.\end{aligned}$$

Además, al factorizar el polinomio del determinante principal $\Delta = (s-s_1)(s-s_2)$ las raíces resultan complejas conjugadas $s_{1,2} = -1 \pm j3$. Por lo que la respuesta del circuito de segundo orden será subamortiguada

$$s^2+2s+10 = s^2+2s+3^2+1 = (s^2+2s+1)+3^2 = (s+1)^2+3^2. \tag{42}$$

Luego, las transformadas de la corriente del inductor y de la tensión del capacitor quedan

$$I_{\mathrm{L}}(s) = \frac{10}{s^2+2s+10} = \frac{10}{(s+1)^2+3^2} \tag{43}$$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{10s+20}{s^2+2s+10} = \frac{10s+20}{(s+1)^2+3^2}. \tag{44}$$

Por último, la corriente del inductor en el dominio del tiempo se obtiene tomando la antitransformada de Laplace de (43)

$$I_{\mathrm{L}}(s) = \frac{10}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2}, \quad i_{\mathrm{L}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I_{\mathrm{L}}(s)\right] = \frac{10}{3}e^{-t}\sin(3t), \tag{45}$$

y la tensión del capacitor tomando la antitransformada de Laplace de (44), para lo cual se opera previamente en el dominio de Laplace

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{10s+20}{(s+1)^2+3^2} = \frac{10s+10}{(s+1)^2+3^2} + \frac{10}{(s+1)^2+3^2} \tag{46}$$

$$= 10\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{10}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \tag{47}$$

y se toma la antitransformada

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[V_{\mathrm{C}}(s)\right] = 10e^{-t}\cos(3t) + \frac{10}{3}e^{-t}\sin(3t) \tag{48}$$

$$= e^{-t}\left[10\cos(3t) + \frac{10}{3}\sin(3t)\right]. \tag{49}$$

Solución 16.

Para $t > 0$, la suma de tensiones en las mallas es

$$1 = 4i_1(t) + \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}}(t) \tag{50}$$

$$0 = 4i_2(t) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - v_{\mathrm{C}}(t) \tag{51}$$

la corriente neta por el capacitor es $i_1(t) - i_2(t) = C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$, de donde

$$0 = 2i_1(t) - 2i_2(t) - \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}. \tag{52}$$

Transformando por Laplace estas tres ecuaciones quedan

$$4I_1(s) + sI_1(s) - i_1(0) + V_{\mathrm{C}}(s) = 1/s \tag{53}$$

$$4I_2(s) + sI_2(s) - i_2(0) - V_{\mathrm{C}}(s) = 0 \tag{54}$$

$$2I_1(s) - 2I_2s - sV_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{C}}(0) = 0, \tag{55}$$

o en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} (s+4) & 0 & 1 \\ 0 & (s+4) & -1 \\ 2 & -2 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ V_{\mathrm{C}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{56}$$

La corriente $I_1(s)$ se calcula

$$I_1(s) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_p} \tag{57}$$

El deteminante principal de esta matriz es

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} (s+4) & 0 & 1 \\ 0 & (s+4) & -1 \\ 2 & -2 & -s \end{vmatrix} = -s(s+4)^2 - 2(s+4) - 2(s+4) \tag{58}$$

$$= -(s+4)[s(s+4)+4] \tag{59}$$

$$= -(s+4)(s^2+4s+4) \tag{60}$$

$$= -(s+4)(s+2)^2, \tag{61}$$

mientras que el determinante sustituto se calcula

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1/s & 0 & 1 \\ 0 & (s+4) & -1 \\ -1 & -2 & -s \end{vmatrix} = -(s+4) + (s+4) - 2/s \tag{62}$$

$$= -2/s, \tag{63}$$

de donde

$$I_1(s) = \frac{2}{s(s+4)(s+2)^2}. \tag{64}$$

Desarrollando $I_1(s)$ en fracciones simples

$$I_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+4)} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)} \tag{65}$$

$$I_1(s) = \frac{1/8}{s} - \frac{1/8}{(s+4)} - \frac{1/2}{(s+2)^2}, \tag{66}$$

donde $A = 1/8$, $B = -1/8$, $C = -1/2$ y $D = 0$.

Las fracciones obtenidas son trasformadas de funciones conocidas, es decir que podemos encontrar la función en el tiempo cuya transformada sea $I_1(s)$, en efecto

$$i_1(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4t} - \frac{1}{2}te^{-2t} \tag{67}$$

que se grafica en la figura 21.

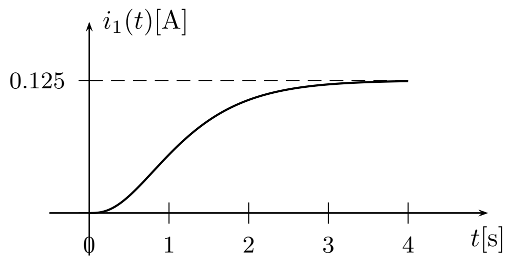


Figura 21: Corriente de la malla 1 del circuito de la figura 11.

Solución 18.

$$i(t) = \left(1 - e^{-2t}\right) u(t)[\mathrm{A}]. \tag{68}$$

Solución 23.

Para $t > 0$, eligiendo correspondientemente las referencias de tensión y corriente, en la malla RC se cumple

$$I_{\mathrm{C}}(s) + I_{\mathrm{o}}(s) = 0 \tag{69}$$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = V_{\mathrm{o}}(s), \tag{70}$$

donde

$$I_{\mathrm{C}}(s) = sCV_{\mathrm{C}}(s) - Cv_{\mathrm{C}}(0) \tag{71}$$

$$I_{\mathrm{o}}(s) = \frac{V_{\mathrm{o}}(s)}{R_{\mathrm{o}}} \tag{72}$$

siendo R_{o} la resistencia de 20Ω. Operando se tiene

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{v_{\mathrm{C}}(0)}{s + \frac{1}{R_{\mathrm{o}}C}} = V_{\mathrm{o}}(s). \tag{73}$$

Para determinar $v_{\mathrm{C}}(0)$ se debe buscar la respuesta forzada del circuito para $t < 0$, resolviendo la ODE no homogénea de equilibrio en términos de la tensión $v_{\mathrm{C}}(t)$.

Llamando R_{in} al resistor de 6Ω, las ecuaciones de equilibrio para $t < 0$ serán

$$311\cos(100t) = R_{\mathrm{in}}i(t) + v_{\mathrm{C}}(t) \tag{74}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}, \tag{75}$$

de donde

$$311\cos(100t) = R_{\mathrm{in}}C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}}. \tag{76}$$

Aplicando coeficientes indeterminados, o resolviendo por método de Lagrange, la respuesta de régimen permanente que se obtiene es

$$v_{\mathrm{C}}(t) = 153{,}65\sqrt{2}\cos(\omega t - 24{,}77^\circ)[\mathrm{V}], \tag{77}$$

y en $t = 0$ es $v_{\mathrm{C}}(0) = 197{,}3\mathrm{V}$, entonces

$$V_{\mathrm{o}}(s) = \frac{v_{\mathrm{C}}(0)}{s + \frac{1}{R_{\mathrm{o}}C}} = \frac{197{,}3}{s + 50}. \tag{78}$$

Antitransformando, la tensión de salida para $t > 0$ será

$$v_{\mathrm{o}}(t) = 197{,}3e^{-50t}. \tag{79}$$

Solución 25.

A partir de las referencias del circuito de la figura 22, las ecuaciones que resultan de aplicar la Ley de Kirchhoff de tensiones en ambas mallas en el dominio del tiempo, son

$$V - v_{\mathrm{L}_1} - v_{\mathrm{R}_1} = 0 \tag{80}$$
$$v_{\mathrm{L}_2} - v_{\mathrm{R}_2} = 0, \tag{81}$$

y la relación tensión-corriente en cada elemento

$$v_{\mathrm{R}_1} = R_1 i_1 \tag{82}$$
$$v_{\mathrm{R}_2} = R_2 i_2 \tag{83}$$
$$v_{\mathrm{L}_1} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{84}$$
$$v_{\mathrm{L}_2} = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{85}$$

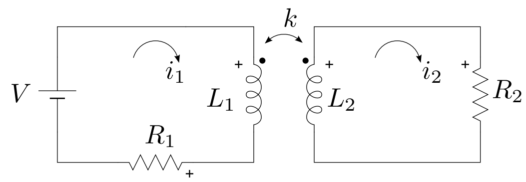


Figura 22: Circuito para $t > 0$.

Luego, reemplazando (82)-(85) en (80) y (81), se tiene

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = V \tag{86}$$
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{87}$$

Las ecuaciones (86) y (87) conforman el sistema de ecuaciones diferenciales que modelan el circuito dado. Tomando la transformada de Laplace de (86) y (87), el sistema de ecuaciones algebraicas en el dominio de la variable s, queda

$$sL_1 I_1(s) - sM I_2(s) + R_1 I_1(s) = V/s \tag{88}$$
$$R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - sM I_1(s) = 0, \tag{89}$$

donde se han considerado $i_1(0) = i_2(0) = 0\mathrm{A}$. El sistema de ecuaciones (88)-(89) puede ponerse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL_1 & -sM \\ -sM & R_2 + sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{90}$$

Por último, se resuelve el sistema dado en (90) mediante Cramer como

$$I_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{91}$$

donde Δ es el determinante de la matriz principal de (90), y Δ_1 y Δ_2 son los determinantes de las matrices sustitutas 1 y 2, respectivamente.

Numéricamente, el determinante de la matriz principal de (90) queda

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + sL_1 & -sM \\ -sM & R_2 + sL_2 \end{vmatrix} = (R_1 + sL_1)(R_2 + sL_2) - s^2M^2 \tag{92}$$

$$= (L_1L_2 - M^2)s^2 + (R_1L_2 + R_2L_1)s + R_1R_2 = 2{,}56s^s + 16s + 12, \tag{93}$$

el determinante sustituto 1 queda

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V/s & -sM \\ 0 & R_2 + sL_2 \end{vmatrix} = \frac{V}{s}(R_2 + sL_2) = \frac{40s + 40}{s}, \tag{94}$$

y el determinante sustituto 2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_1 + sL_1 & V/s \\ -sM & 0 \end{vmatrix} = VM = 12. \tag{95}$$

Luego, las transformadas de las corrientes queda

$$I_1(s) = \frac{15{,}625(s + 1)}{s(s^2 + 6{,}25s + 4{,}6875)} = \frac{15{,}625(s + 1)}{s(s + 0{,}87)(s + 5{,}38)} \tag{96}$$

$$I_2(s) = \frac{4{,}6875}{s^2 + 6{,}25s + 4{,}6875} = \frac{4{,}6875}{(s + 0{,}87)(s + 5{,}38)}. \tag{97}$$

Por último, se aplica la antitransformada de Laplace para lo cual es necesario hacer el desarrollo en fracciones parciales. La corriente 1 queda

$$I_1(s) = \frac{10/3}{s} - \frac{0{,}51}{s + 0{,}87} - \frac{2{,}88}{s + 5{,}38} \tag{98}$$

por lo que

$$i_1(t) = \frac{10}{3} - 0{,}51e^{-0{,}87t} - 2{,}88e^{-5{,}38t}[\mathrm{A}], \tag{99}$$

y la corriente 2

$$I_2(s) = \frac{1{,}04}{s + 0{,}87} - \frac{1{,}04}{s + 5{,}38} \tag{100}$$

por lo que

$$i_2(t) = 1{,}04e^{-0{,}87t} - 1{,}04e^{5{,}38t}[\mathrm{A}]. \tag{101}$$