# Guía 7. Teoremas circuitales

**Ejercicio 1.**

Encontrar el equivalente de Thevenin en los puntos $AB$ del circuito de la figura 1.

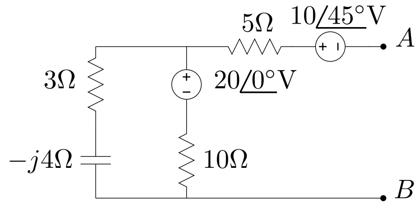



**Figura 1:** Equivalente Thevenin.

**Ejercicio 2.**

Dado el circuito de la figura 2, encontrar el equivalente de Norton en los puntos $A$ y $B$.

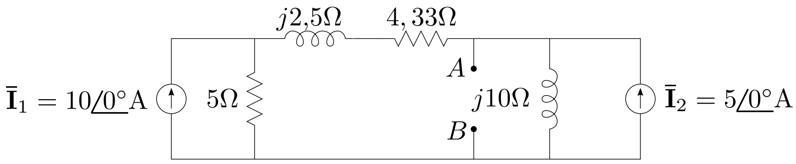



**Figura 2:** Equivalente Norton.

**Ejercicio 3.**

La máxima corriente que puede entregar un circuito está dada por la tensión de salida a circuito abierto sobre su impedancia de salida

$$\bar{\mathbf{I}}_{\text{máx}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{o}}(0)}{\mathbf{Z}_{\text{o}}} \tag{1}$$

(a) Demostrar utilizando teorema de Thevenin.

(b) Determinar la máxima corriente que puede entregar el circuito de la figura 1.

**Ejercicio 4.**

Aplicando el teorema de Thevenin, para el circuito de la figura 3 calcular la potencia disipada en el resistor $R$ cuando este vale $R = 10\Omega$, $R = 100\Omega$ y $R = 1000\Omega$.

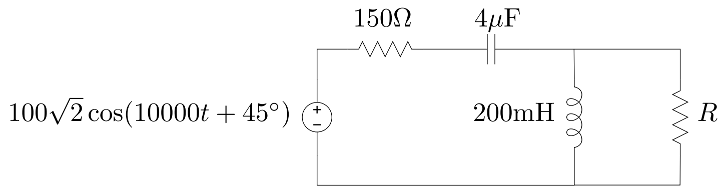



**Figura 3:** Cálculo de potencia.

## Ejercicio 5.

Se desea construir una resistencia para un horno que va a ser alimentado por un generador de tensión senoidal de $V_{\text{ef}} = 24\text{V}$ (ver figura 4), para lo cual se pide

(a) calcular el valor resistivo necesario para lograr máxima transferencia de potencia si la impedancia de salida del generador es de $\mathbf{Z}_{\text{o}} = 5 + j3{,}32\Omega$,

(b) calcular la potencia transferida,

(c) construir el triángulo de potencias en el generador y diagrama fasorial de tensiones del circuito generador mas horno.

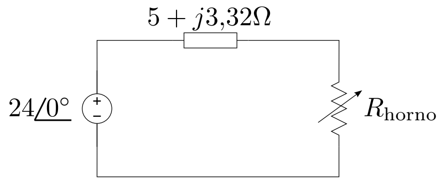



**Figura 4:** Resistencia para horno eléctrico.

## Ejercicio 6.

La figura 5 muestra el circuito equivalente de la etapa de salida de un amplificador más filtro al que se le conecta un parlante de $Z_l = R_l + X_l$. Si $X_l = j4$, cuanto debería ser el valor de $R_l$ para que la potencia transferida a la carga sea máxima?

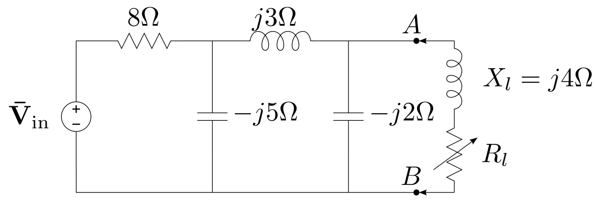



**Figura 5:** Potencia transferida a un parlante.

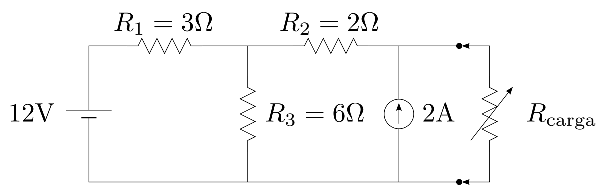



**Figura 6:** Máxima transferencia de potencia.

**Ejercicio 7.**

Encontrar la máxima potencia que puede recibir la carga $R_{\text{carga}}$ del circuito de la figura 6.

**Ejercicio 8.**

El circuito de la figura 7 fue ajustado para que el generador real (con impedancia interna $\mathbf{Z}_{\text{i}}$) transfiera la máxima potencia.

(a) Encontrar el equivalente de Thevenin del generador si la potencia máxima transferida es de $P = 8653{,}8\text{W}$.

(b) Calcular la máxima corriente que este generador es capaz de entregar.

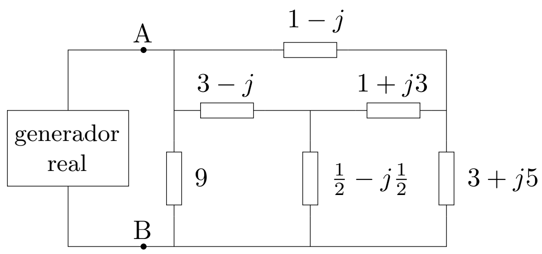



**Figura 7:** Máxima transferencia de potencia.

**Ejercicio 9.**

Encontrar el equivalente en conexión triángulo del circuito de la figura 8.

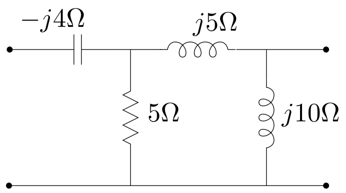



**Figura 8:** Transformación estrella-triángulo.

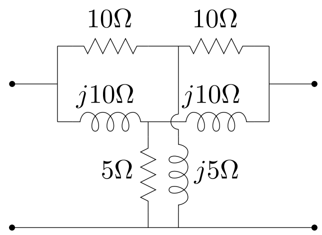



**Figura 9:** Equivalente triángulo.

**Ejercicio 10.**

Encontrar el circuito simple en conexión triángulo equivalente del circuito de la figura 9.

**Ejercicio 11.**

Una carga se alimenta con tres generadores reales en paralelo de tensión de $180\underline{/0°}$. La impedancia de salida de cada generador es de $\mathbf{Z}_{\text{out}} = 3 + j9$. Calcular la impedancia de salida del sistema y la tensión de salida a circuito abierto.

**Ejercicio 12.**

En el circuito de la figura 10 encontrar la tensión de fuente $V$ y la corriente $I$ según las referencias indicadas.

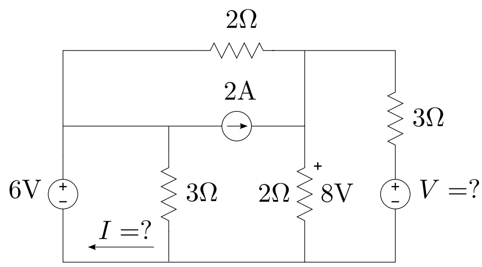



**Figura 10:** Encontrar $V$ e $I$.

**Ejercicio 13.**

En el circuito de la figura 11 determinar la impedancia a conectar en los terminales $A - B$ para máxima transferencia de potencia.

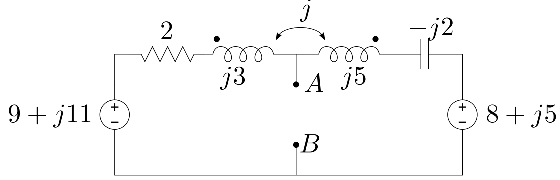



**Figura 11:** Máxima transferencia de potencia.

**Ejercicio 14.**

Se tiene un amplificador de audio de impedancia de salida $|\mathbf{Z}_\mathrm{A}| = 8\Omega$, ($\mathbf{Z}_\mathrm{A} = 6 - j5{,}3$) y se desea conectar un parlante cuya curva de impedancia de cono al aire indica que para $f = 5\mathrm{kHz} \rightarrow \mathbf{Z}_\mathrm{p} = 4\Omega$. Se construye el circuito de la figura 12 con el fin que el amplificador transfiera la máxima potencia al parlante en $f = 5\mathrm{kHz}$. Calcular $L_1$ y $L_2$.

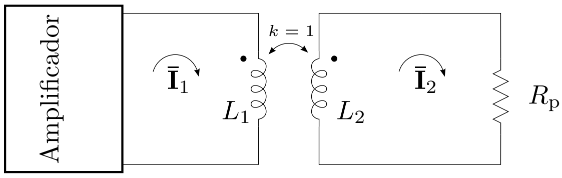



**Figura 12:** Carga con acoplamiento inductivo.

**Ejercicio 15.**

Encontrar el valor de $R_\mathrm{c}$ que maximice la transferencia de potencia en el circuito de la figura 13.

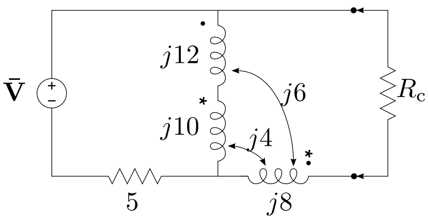



**Figura 13:** Carga con acoplamiento magnético.

**Ejercicio 16.**

El circuito de la figura 14 se encuentra en régimen permanente. En estas condiciones se pide:

1. encontrar el equivalente de Thévenin en los bornes $A - B$,
2. determinar el valor de $R_p$ para obtener la máxima transferencia de potencia,
3. sobre el circuito original y con el valor de $R_p$ obtenido calcular las potencias $P$, $Q$ y $S$ en la fuente y en las resistencias, verificando su igualdad,
4. construir el diagrama fasorial completo (puede ser cualitativo).

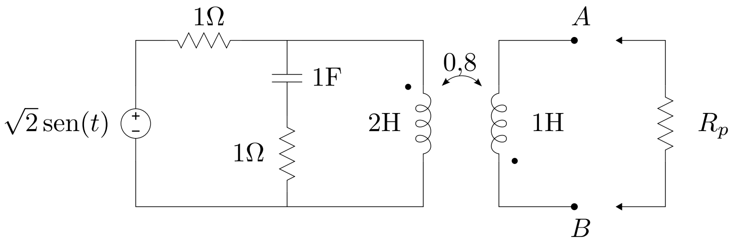



**Figura 14:** Circuito en régimen permanente con acoplamiento magnético.

# Soluciones

**Solución 1.**

$$\bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{Th}} = -1{,}12 - 11{,}39 = 11,45\underline{/-95{,}64^\circ} \tag{2}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = 7{,}97 - j2{,}16 = 8{,}26\underline{/-15{,}17^\circ} \tag{3}$$

**Solución 5.**

El teorema de la máxima transferenica de potencia aplicado a una carga resistiva variable dice que para transferir la máxima potencia de un circuito o generador a la carga, la resistencia de carga debe ser igual al módulo de la impedancia de salida del circuito o generador, es decir que para este caso

$$R_{horno} = |\mathbf{Z}_o|. \tag{4}$$

La potencia transferida con esta resistencia de carga será

$$P_{transf} = |\bar{\mathbf{I}}|^2\, R_{horno} \tag{5}$$

donde la corriente total es

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{(\mathbf{Z}_o + R_{horno})}. \tag{6}$$

El triángulo de potencias se determina como

$$S = |\bar{\mathbf{V}}|\,|\bar{\mathbf{I}}|; \quad P = |\bar{\mathbf{V}}|\,|\bar{\mathbf{I}}|\,cos(\varphi); \quad Q = |\bar{\mathbf{V}}|\,|\bar{\mathbf{I}}|\,sen(\varphi). \tag{7}$$

Se calculan las caídas de tensión en $\mathbf{Z}_o$ y en $R_{horno}$ para construir el diagrama fasorial

$$\bar{\mathbf{V}}_Z = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{Z}_o; \quad \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{I}}R_{horno}. \tag{8}$$

**Resolución numérica**

La resistencia del horno será

$$R_{horno} = \sqrt{5^2 + 3{,}32^2} = 6\Omega, \tag{9}$$

y la corriente

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{24V}{(11 + j3{,}32)} = 2 - j0{,}6\Omega = 2{,}09\underline{/-16{,}8^\circ} \tag{10}$$

la potencia transferida y las potencias en la fuente serán

$$P_{transf} = (2{,}09)^2\, 6 = 26{,}18\mathrm{W} \tag{11}$$
$$P = 24 \cdot 2{,}09 \cdot 0{,}97 = 47{,}99\mathrm{W} \tag{12}$$
$$Q = 24 \cdot 2{,}09 \cdot 0{,}26 = 14{,}48\mathrm{VAR} \tag{13}$$
$$S = 24 \cdot 2{,}09 = 50{,}12\mathrm{VA}. \tag{14}$$

Por último, las tensiones fasoriales en los elementos serán

$$\bar{\mathbf{V}}_Z = (2 - j0{,}6) \cdot (5 + j3{,}32) = 12 + j3{,}62V = 12{,}53\underline{/16{,}79^\circ} \tag{15}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_R = (2 - j0{,}6) \cdot 6 = 12 - j3{,}6V = 12{,}53\underline{/-16{,}79^\circ}. \tag{16}$$

En la fig. 15 se puede ver el diagrama fasorial completo y el triángulo de potencias en la fig. 16.

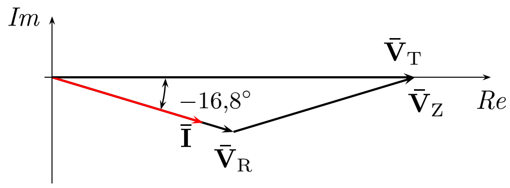



**Figura 15:** Diagrama fasorial de tensiones y corriente.

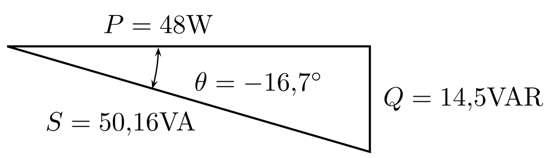



**Figura 16:** Triángulo de potencias.

**Solución 6.**

El teorema de la máxima transferencia de potencia aplicado a una carga con parte resistiva variable dice que para transferir la máxima potencia de un circuito o generador a la carga, la parte resistiva de ésta debe ser igual al módulo de la impedancia de salida del circuito o generador mas la parte reactiva de la carga

$$R_L = |\mathbf{Z}_o + X_L| \tag{17}$$

y la impedancia de salida del circuito anterior se puede obtener haciendo el equivalente de Thevenin a los bornes $A - B$ (fig. 17). Luego, con $\mathbf{Z}_{Th} = R_{Th} + X_{Th}$, la $R_L$ será

$$R_L = |\mathbf{Z}_{Th} + X_L| = \sqrt{(R_{Th})^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \tag{18}$$

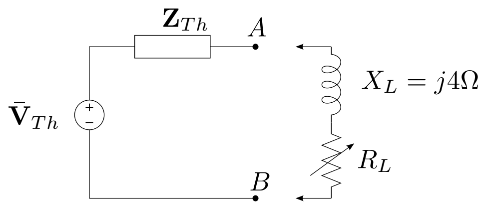



**Figura 17:** Circuito equivalente de Thevenin.

Para obtener la impedancia de Thevenin $\mathbf{Z}_{Th}$ se debe pasivar la fuente $\bar{\mathbf{V}}_{in}$, de esta forma la resistencia de $8\Omega$ forma un paralelo con el capacitor de $-j5\Omega$, que a su vez están en serie con el inductor de $j3\Omega$. Llamando a esto $\mathbf{Z}_1$ tenemos

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{8\,(-j5)}{8 - j5} + j3 = 2{,}24719 - j0{,}59551 \tag{19}$$

luego, esta impedancia parcial $\mathbf{Z}_1$ está en paralelo con el capacitor de $-j2\Omega$

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_1\,(-j2)}{\mathbf{Z}_1 - j2} = 0{,}76 - j1{,}12 \tag{20}$$

entonces $R_L$ deberá ser igual a

$$R_L = \sqrt{(0{,}76)^2 + (4 - 1{,}12)^2} = 3\Omega. \tag{21}$$

**Solución 7.**

$$P_{max} = 16{,}33\mathrm{W} \tag{22}$$

**Solución 8.**

Un generador real transmite la máxima potencia cuando se lo carga con una impedancia igual al conjugado de su impedancia de salida. Conociendo la impedancia de carga que permite la máxima transferencia de potencia se conoce entonces la impedancia de salida del generdador.

Para encotrar la impedancia equivalente que carga al generador se reduce el circuito de carga mediante una transformación estrella-triángulo de las impedancia $\mathbf{Z}_1 = 3 - j\Omega$, $\mathbf{Z}_2 = 1/2 - j1/2\Omega$ y $\mathbf{Z}_3 = 1 + j3\Omega$. El circuito resultante es el de la fig. 18.

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3} = 3 - j2\Omega \tag{23}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} = 2 + j16\Omega \tag{24}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} = 2 + j3\Omega \tag{25}$$

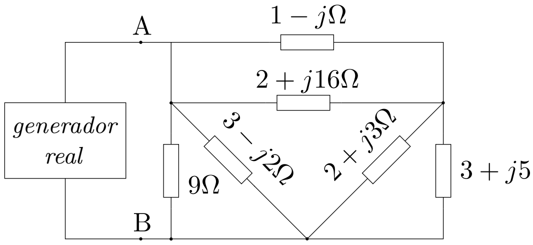



**Figura 18:** Transformación estrella-triángulo.

luego, la impedancia equivalente vista desde los bornes del generador es

$$\mathbf{Z}_{eq} = (9//\mathbf{Z}_A)\,//[(1-j)//\mathbf{Z}_B + (3+j5)//\mathbf{Z}_C] \tag{26}$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = [9//(3-j2)]\,//\,\{[(1-j)//(2+j16)] + [(3+j5)//(3+j5)]\} \tag{27}$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = (2,4324 - j1,0946)\,//\,(1,12821 - j0,97436 + 1,2022 + j1,8764i) \tag{28}$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1,3982 - j0,0184\Omega \tag{29}$$

es decir que la impedancia interna del generador es

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{eq}^* = 1{,}3982 + j0{,}0184\Omega, \tag{30}$$

que es también la impedancia equivalente de Thevenin.

La potencia transferida a la carga es $P = 8653{,}8$W, entonces el modulo de la corriente es

$$|I| = \sqrt{\frac{P}{\mathcal{R}e[\mathbf{Z}_{eq}]}} = \sqrt{\frac{8653{,}8}{1{,}3982}} \tag{31}$$

$$|I| = 78{,}671\text{A} \tag{32}$$

Finalmente, la tensión de Thevenin se obtiene como el producto de la corriente total por la impedancia total

$$V_{th} = I \cdot (\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_{eq}) = 220\text{V}. \tag{33}$$

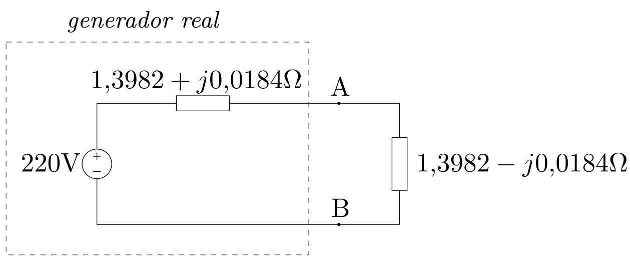



**Figura 19:** Equivalente de Thevenin del generador real.

**Solución 9.**

$$\mathbf{Z}_A = 1 - j4\Omega \tag{34}$$

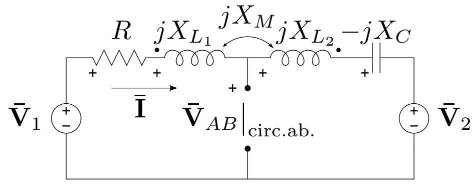
$$\mathbf{Z}_B = 4 + j1\Omega \tag{35}$$

$$\mathbf{Z}_C = -0{,}55 + j3{,}38\Omega \tag{36}$$

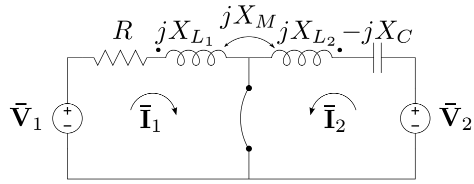
**Solución 13.**

La impedancia a conectar entre los terminales $A - B$ para máxima transferencia de potencia viene dada por $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*_{Th}$, donde $\mathbf{Z}_{Th}$ es la impedancia equivalente de Thevenin. Por lo que hay que determinar el circuito equivalente de Thevenin del circuito dado, donde

$$\bar{\mathbf{V}}_{Th} = \bar{\mathbf{V}}_{AB}\Big|_{\text{circ.ab.}}, \qquad \mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AB}\Big|_{\text{circ.ab.}}}{\bar{\mathbf{I}}_{AB}\Big|_{\text{corto circ.}}}.$$




**(a)** Cálculo de $\bar{\mathbf{V}}_{AB}\Big|_{\text{circ.ab.}}$




**(b)** Cálculo de $\bar{\mathbf{I}}_{AB}\Big|_{\text{corto circ.}}$

**Figura 20:** Circuitos para el cálculo del equivalente Thevenin.

Para el cálculo de la tensión $A - B$ a circuito abierto se parte de las ecuaciones de equilibrio de tensiones del circuito de la figure 20a

$$\bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{V}}_R - \bar{\mathbf{V}}_{b_1} - \bar{\mathbf{V}}_{AB}\Big|_{\text{circ.ab.}} = 0, \tag{37}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB}\Big|_{\text{circ.ab.}} - \bar{\mathbf{V}}_{b_2} - \bar{\mathbf{V}}_C - \bar{\mathbf{V}}_2 = 0 \tag{38}$$

y las relaciones $V - I$ en cada elemento

$$\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}} \tag{39}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{b_1} = jX_{L_1}\bar{\mathbf{I}} - jX_M\bar{\mathbf{I}} \tag{40}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{b_2} = jX_{L_2}\bar{\mathbf{I}} - jX_M\bar{\mathbf{I}} \tag{41}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_C = -jX_C\bar{\mathbf{I}}. \tag{42}$$

Luego

$$\bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}} = \bar{\mathbf{I}}(R + jX_{L_1} - jX_M) = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{Z}_1 \tag{43}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}} - \bar{\mathbf{V}}_2 = \bar{\mathbf{I}}(jX_{L_2} - jX_M - jX_C) = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{Z}_2 \tag{44}$$

que resolviendo para $\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}}$ queda

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1\mathbf{Z}_2 + \bar{\mathbf{V}}_2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}. \tag{45}$$

Dados los valores de $\mathbf{Z}_1 = 2 + j2 = 2{,}828\underline{/45^\circ}$ y $\mathbf{Z}_2 = j2 = 2\underline{/90^\circ}$, la tensión $\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}}$ será

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}} = 7{,}2 + j7{,}6 = 10{,}469\underline{/46{,}55^\circ}. \tag{46}$$

Para el cálculo de la corriente de cortocircuito $\bar{\mathbf{I}}_{AB}\big|_{\text{corto circ.}}$, se parte del circuito de la figura 20b, donde $\bar{\mathbf{I}}_{AB}\big|_{\text{corto circ.}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2$. Los fasores $\bar{\mathbf{I}}_1$ e $\bar{\mathbf{I}}_2$ se obtiene a partir del método de las corrientes de malla. Los elementos de la matriz de impedancias, a partir de las corrientes de malla definidias en la figure 20b son

$$z_{11} = R + jX_{L_1} \tag{47}$$
$$z_{22} = jX_{L_2} - jX_C \tag{48}$$
$$z_{12} = z_{21} = jX_M \tag{49}$$

por lo que el sistema matricial queda

$$\begin{bmatrix} 2 + j3 & j \\ j & j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + j11 \\ 8 + j5 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Resolviendo, se tiene

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = 3{,}38 + j0{,}16 = 3{,}38\underline{/2{,}71^\circ} \tag{51}$$
$$\bar{\mathbf{I}}_2 = 0{,}54 - j2{,}72 = 2{,}77\underline{/-78{,}7^\circ}, \tag{52}$$

por lo que la corriente de cortocircuito queda

$$\bar{\mathbf{I}}_{AB}\big|_{\text{corto circ.}} = 3{,}92 - j2{,}56 = 4{,}68\underline{/-33{,}14^\circ}. \tag{53}$$

Finalmente, la impedancia equivalente de Thevenin queda

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AB}\big|_{\text{circ.ab.}}}{\bar{\mathbf{I}}_{AB}\big|_{\text{corto circ.}}} = 0{,}4 + j2{,}2 = 2{,}236\underline{/79{,}7^\circ}, \tag{54}$$

y por lo tanto, la impedancia de carga, para máxima transferencia de potencia es

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{Th}^{*} = 0{,}4 - j2{,}2. \tag{55}$$

**Solución 15.**

El valor de $R_c$ que maximiza la transferencia de potencia es

$$R_c = 4{,}03\Omega. \tag{56}$$