Guía 8. Resonancia

Ejercicio 1.

Encontrar la frecuencia de resonancia de un circuito RLC serie con $R = 25\Omega$, $L = 21\text{mH}$ y $C = 470\mu\text{F}$.

Ejercicio 2.

Calcular para resonancia la corriente total y en cada rama para el circuito de la figura 1. Construir el diagrama fasorial.

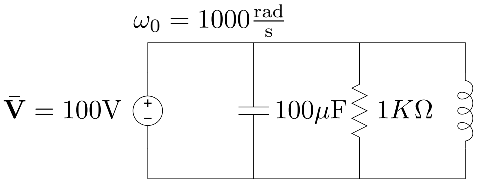

Figura 1: Circuito paralelo resonante.

Ejercicio 3.

En el circuito de la figura 2 se ajusta la frecuencia de manera que el RLC paralelo (formado por R_2L_2C) esté en resonancia. Bajo esta condición

(a) dibujar el diagrama fasorial completo de tensiones y corrientes,

(b) indicar en el diagrama fasorial de tensiones la tensión $\bar{\mathbf{V}}_{\text{AB}}$

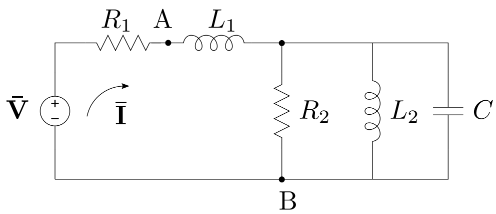

Figura 2: Método fasorial.

Ejercicio 4.

Para el circuito de la figura 3, existe una frecuencia de resonancia? Calcular.

Ejercicio 5.

Explicar el fenómeno de *sobretensión* en los elementos reactivos de un circuito RLC serie alimentado por un generador de tensión constante y frecuencia variable. Graficar en un plano Ω vs. ω (plano $|\mathbf{Z}|$) los módulos de todas las impedancias y mostrar en el gráfico en que zonas se produce la sobretensión. Graficar además los módulos de la tensión total $|\bar{\mathbf{V}}_{\text{T}}|$, tensión en el inductor $|\bar{\mathbf{V}}_{\text{L}}|$ y capacitor $|\bar{\mathbf{V}}_{\text{C}}|$ en otro plano V vs. ω destacando las zonas de sobretensión en cada elemento.

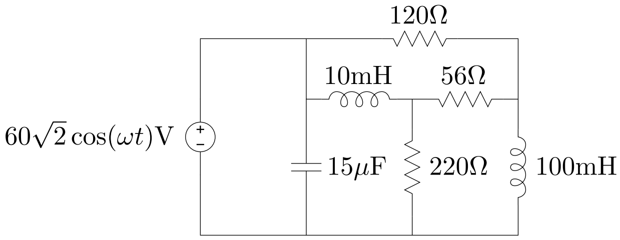

Figura 3: Circuito RLC genérico.

Ejercicio 6.

Deducir y calcular la frecuencia de resonancia ω_0 y el ancho de banda AB de un circuito RLC paralelo simple, con $R = 100\Omega$, $L = 10$mH y $C = 20\mu$F.

Ejercicio 7.

En un circuito RLC serie se varía la frecuencia ω del generador hasta obtener la caída de tensión máxima en la resistencia. El valor de tensión que se obtiene es $V_{\mathrm{R}} = 30$V y se logra a la frecuencia $\omega = 2000\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. En estas condiciones se miden las tensiones en los elementos inductivo y capacitivo dando $V_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{C}} = 20$V, y el valor de la corriente $I_{\mathrm{T}} = 6$A. Determinar:

(a) factor de selectividad Q_0 y ancho de banda del circuito,

(b) frecuencias de potencia mitad ω_1 y ω_2,

(c) componentes resistivo, inductivo y capacitivo (R, L y C) del circuito.

Ejercicio 8.

La potencia disipada por una resistencia de 10Ω de un circuito RLC serie es $P = 200$W en resonancia, y $P = 100$W en $\omega_1 = 270{,}16$ y $\omega_2 = 370{,}16$.

(a) Determinar la frecuencia de resonancia, el ancho de banda del circuito, el valor del factor Q_0 y la capacidad e inductancia de los elementos.

(b) Existirá sobretensión en el circuito? Justificar.

Ejercicio 9.

El circuito equivalente de un capacitor real viene dado por un inductor L en serie con una resistencia llamada ESR (por el ingles Equivalent Serial Resistor) y con un capacitor ideal C que representa la capacidad propiamente dicha del elemento real. Además, en paralelo se encuentra la resistencia de fuga del dieléctrico de muy elevado valor (ver figura 4). Si los valores de un capacitor real son $L = 2$nH, $ESR = 0{,}1\Omega$, $C = 4{,}7\mu$F y $R_{\mathrm{D}} = 10\mathrm{M}\Omega$, se pide:

(a) graficar el lugar geométrico de admitancia del circuito cuando ω varía entre 0 e ∞,

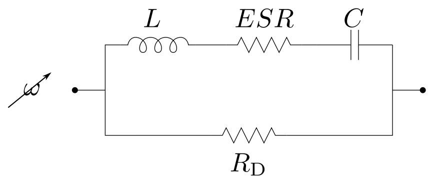

Figura 4

(b) señalar en el gráfico los valores óhmicos de corte del lugar con el eje real y los valores de frecuencia ω para estos cortes,

(c) determinar el rango de frecuencia para el cuál el elemento tiene carácter capacitivo.

Ejercicio 10.

Encontrar analíticamente y graficar el lugar geométrico de admitancia e impedancia del circuito de la figura 5.

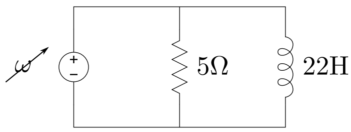

Figura 5: Lugar geométrico de impedancia y admitancia.

Ejercicio 11.

Para el circuito de la figura 6 se pide el desarrollo completo y cálculo del lugar geométrico de admitancia y, si el circuito puede entrar en resonancia, para que valor o valores de X_C lo hace.

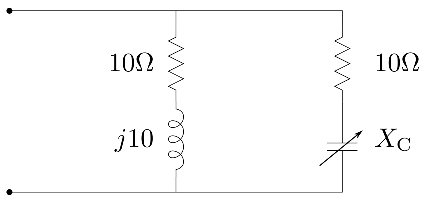

Figura 6: Lugar geométrico de admitancia.

Ejercicio 12.

Determinar los valores de L que hacen que el circuito de la figura 7 no entre en resonancia al variar la resistencia entre $0 < R_L < \infty$.

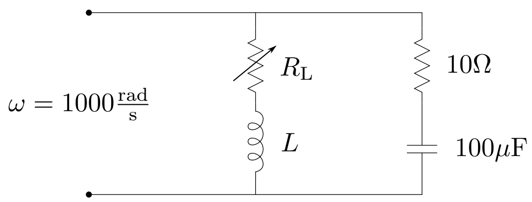

Figura 7: Lugar geométrico.

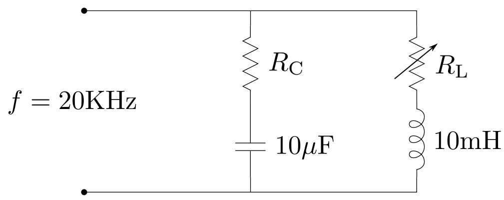

Figura 8: Lugar geométrico.

Ejercicio 13.

Determinar el rango de valores de R_C para que el circuito de la figura 8 pueda entrar en resonancia.

Ejercicio 14.

El circuito de la figura 9 es una representación aproximada del sintonizador de entrada de un receptor de LF de reloj radiocontrolado[1]. Se pide:

(a) Calcular el valor del capacitor para que el circuito esté en resonancia a $f =$ 60KHz.

(b) Calcular el valor del capacitor para el cual se transfiere la máxima potencia a R_i, utilizando para este cálculo el lugar geométrico de admitancia del circuito.

(c) Utilizando el equivalente de Norton recalcular el valor de C para máxima transferencia de potencia en la R_i.

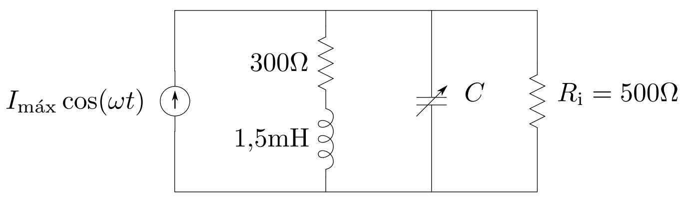

Figura 9: Sintonizador de reloj radiocontrolado.

[1]http://en.wikipedia.org/wiki/WWVB

Ejercicio 15.

Construir el lugar geométrico de admitancia del circuito de la figura 10 si el capacitor puede variar desde 0 a ∞. Indicar en el lugar geométrico si es posible que el circuito entre en resonancia para algún valor de C.

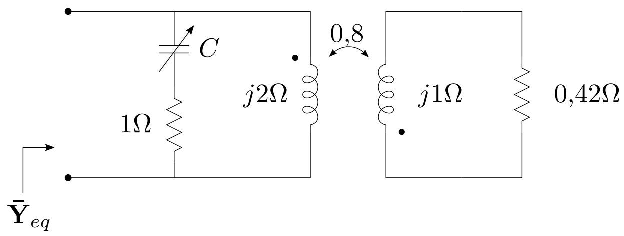

Figura 10: Lugar geométrico de circuito con acoplamiento magnético.

Soluciones

Solución 1.

$$\omega_0 = 318{,}3\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{1}$$

Solución 2.

$$\bar{\mathbf{I}}_\text{R} = 0{,}1\underline{/0°}\text{A} \tag{2}$$
$$\bar{\mathbf{I}}_\text{L} = 10\underline{/-90°}\text{A} \tag{3}$$
$$\bar{\mathbf{I}}_\text{C} = 10\underline{/90°}\text{A} \tag{4}$$
$$\bar{\mathbf{I}}_\text{T} = 0{,}1\underline{/0°}\text{A} \tag{5}$$

Solución 6.

$$\omega_0 = 2236{,}1\frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \text{AB} = 500\frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{6}$$

Solución 7.

La máxima tensión en un resistor de un circuito serie RLC se obtiene en resonancia, por lo que el circuito está en resonancia y

$$\omega_0 = 2000\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{7}$$
$$V_\text{T} = V_\text{R} = 30\text{V}. \tag{8}$$

(a) En estas condiciones el factor Q_0 será

$$Q_0 = \frac{V_\text{L}}{V_\text{T}} = \frac{V_\text{C}}{V_\text{T}} = \frac{2}{3}. \tag{9}$$

Luego, recordando que para un RLC serie el ancho de banda es $AB = \frac{R}{L}$ y $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$ tenemos

$$AB = \frac{\omega_0}{Q_0} = 3000\frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{10}$$

(b) Para determinar las frecuencias de potencia mitad tenemos que

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{11}$$
$$AB = \omega_2 - \omega_1 \tag{12}$$

de donde

$$\omega_1 = 1000\frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \omega_2 = 4000\frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{13}$$

(c) La componente resistiva de un circuito en resonancia está determinada por la tensión y corriente total

$$R = \frac{V_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{T}}} = 5\Omega, \tag{14}$$

luego, a partir del ancho de banda del circuito se tiene L

$$L = \frac{R}{AB} = 1{,}66\mathrm{mH}, \tag{15}$$

y en base a la frecuencia de resonancia se obtiene C

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{AB}{\omega_0^2 R} = 150\mu\mathrm{F}. \tag{16}$$

Solución 8.

(a) La frecuencia de resonancia de un circuito RLC serie es la media geométrica de las frecuencias de potencia mitad ω_1 y ω_2

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{270{,}16 \cdot 370{,}16} = 316{,}23\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{17}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50{,}329\mathrm{Hz}. \tag{18}$$

El ancho de banda AB en Hz es

$$AB = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = 15{,}915\mathrm{Hz}. \tag{19}$$

y el factor de calidad Q_0 viene dado por

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{AB} = 3{,}16. \tag{20}$$

Además, el factor Q_0 se define en términos de los elementos del circuito como

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}, \tag{21}$$

de donde

$$L = \frac{Q_0 R}{\omega_0} = 0{,}1\mathrm{H}. \tag{22}$$

Finalmente, la frecuencia de resonancia expresada en términos de L y C es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{23}$$

de donde

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 100\mu\mathrm{F}. \tag{24}$$

(b) La resistencia crítica para este circuito es

$$R_{\mathrm{c}} = \sqrt{2\frac{L}{C}} = \sqrt{2\frac{0{,}1}{100 \times 10^{-6}}} = 44{,}721\Omega, \tag{25}$$

como $R = 10\Omega$ es menor a la resistencia crítica, existe sobretensión.

Otra forma de justificar es a partir del valor de Q_0. En resonancia, el módulo de la tensión que cae en los elementos reactivos es Q_0 veces el módulo de la tensión aplicada

$$|\bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{L}}| = |\bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{C}}| = Q_0 |\bar{\mathbf{V}}_{Total}|, \tag{26}$$

como para este caso Q_0 es mayor que 1, en el circuito existirá sobretensión.

Solución 12.

El lugar geométrico de admitancias del circuito es el que se muestra en la figura 11, donde $\mathbf{Y}_2$ es la admitancia fija de la rama RC, y la semicircunferencia de diámetro $\frac{1}{X_{\mathrm{L}}}$ el lugar geométrico de la admitancia de la rama RL.

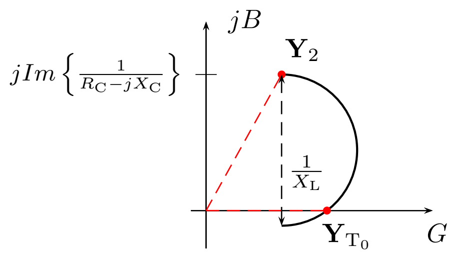

Figura 11: Lugar geométrico correspondiente al circuito del ejercicio 12.

Para que el circuito entre en resonancia la parte reactiva de la admitancia total equivalente $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}$ debe ser nula (indicada en la gráfica como $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}_0}$). Para que exista un valor real de R_{L} que anule la parte reactiva de $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}$ el lugar geométrico debe cortar el eje real. En el lugar geométrico se ve que para que esto ocurra se debe cumplir

$$Im\left\{\frac{1}{R_{\mathrm{C}} - jX_{\mathrm{C}}}\right\} < \frac{1}{X_{\mathrm{L}}} \tag{27}$$

$$0{,}5 < \frac{1}{1000L} \tag{28}$$

de donde para que el circuito **no** entre en resonancia para ningún valor de R_{L}

$$L > 20\mathrm{mH}. \tag{29}$$

Solución 13.

$$R_{\mathrm{C}} > 31{,}61\Omega. \tag{30}$$

Solución 14.

(a) La admitancia total equivalente vista desde la fuente de corriente del circuito es

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{300 + j180\pi} + j120000\pi C + 0{,}002 \tag{31}$$

con $\omega = 2\pi 60 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Para resonancia se debe anular la parte imaginaria de $\mathbf{Y}_{\mathrm{eq}}$

$$Im\{\mathbf{Y}_{\mathrm{eq}}\} = 120000\pi C - \frac{180\pi}{32400\pi^2 + 90000} = 0, \tag{32}$$

de donde

$$C = 3{,}66\mathrm{nF}. \tag{33}$$

(b) Para máxima transferencia de potencia el módulo de la admitancia de salida debe ser igual a la admitancia de carga $\frac{1}{R_{\mathrm{i}}}$. La admitancia de salida es un lugar geométrico que depende del valor de C, y su gráfica puede verse en la figura 12, donde también se representa la admitancia de carga $\frac{1}{R_{\mathrm{i}}}$. Para determinar gráficamente el o los valores de admitancia de salida que logran maximizar la potencia entregada se traza un círculo de centro en el orígen y radio $\frac{1}{R_{\mathrm{i}}} = 0{,}002\mathrm{S}$, con lo que se obtiene el o los valores de $\mathbf{Y}_{\mathrm{eq}}$ de módulo igual a la admitancia de carga. En este caso existe un único valor, que se indica en la gráfica como $\mathbf{Y}_{\mathrm{máxP}}$. Como se ve, la parte real de $\mathbf{Y}_{\mathrm{máxP}}$ es igual a la parte real de $\mathbf{Y}_1$, y vale

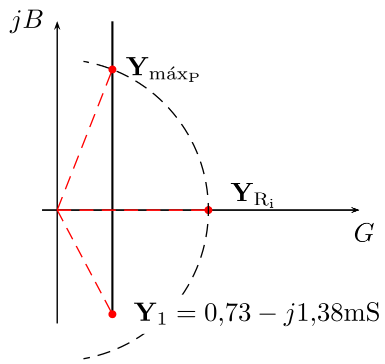

Figura 12: Lugar geométrico de la admitancia de salida del circuito del ejercicio 14.

0,73mS. Luego, sabiendo que el módulo de $\mathbf{Y}_{\mathrm{máxP}}$ debe ser igual a $\frac{1}{R_{\mathrm{i}}} = 0{,}002\mathrm{S}$, tenemos

$$|\mathbf{Y}_{\mathrm{máxP}}|^2 = 0{,}00073^2 + B^2 = 0{,}002^2 \rightarrow B = 1{,}86\mathrm{mS}, \tag{34}$$

con lo cuál, la admitancia de la rama capacitiva será

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{C}} = \mathbf{Y}_{\mathrm{máxP}} - \mathbf{Y}_1 = j3{,}24\mathrm{mS}, \tag{35}$$

de donde

$$C = \frac{3{,}24 \times 10^{-3}}{2\pi 60 \times 10^3} = 8{,}6\mathrm{nF}. \tag{36}$$

Notar que, debido al valor de la admitancia de la rama fija $\mathbf{Y}_1$, existe sólo un valor de C que logra transferir la máxima potencia. En general pueden existir dos valores de C, si el círculo de módulo constante corta al lugar geométrico en dos puntos; un valor de C (como en este caso), o ningún valor de C si la conductancia de $\mathbf{Y}_1$ es mayor a la admitancia de carga $\mathbf{Y}_{\mathrm{R_i}}$.

(c) La impedancia de Thevennin del circuito equivalente a los bornes de la resistencia de carga R_{i} es

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_{\mathrm{C}}}. \tag{37}$$

Para máxima transferencia de potencia se debe cumplir

$$|\mathbf{Z}_{\mathrm{Th}}| = R_{\mathrm{i}} \tag{38}$$

de donde, despejando C

$$C = 8{,}6\mathrm{nF}. \tag{39}$$