Nombre: Legajo:

Examen Final de Teoría de los Circuitos I

27 de septiembre de 2017

1. El circuito de la figura 1 se encuentra en régimen permanente, se pide

   a) aplicando el método de las mallas determinar $\mathbf{Z}_{\text{in}}$

   b) calcular las corrientes $\bar{\mathbf{I}}_1$ e $\bar{\mathbf{I}}_2$

   c) construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes de cada malla

   d) calcular el triángulo de potencias en el generador y decir de que carácter es el circuito

   e) calcular la potencia disipada en cada resistor

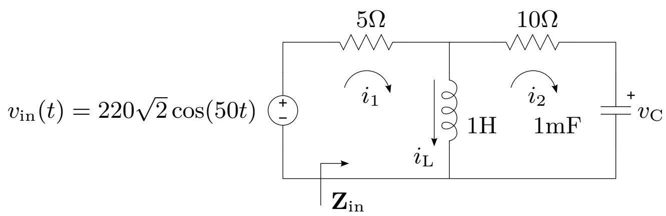

Figura 1: Régimen permanente

Luego, en el instante $t = 0$ la excitación se apaga, $v_{\text{in}}(t) = 0$. Para $t > 0$ se pide

   a) encontrar las condiciones iniciales $i_{\text{L}}(0)$ y $v_c(0)$ según las referencias indicadas

   b) calcular la corriente $i_{\text{L}}(t)$ para $t > 0$.

Solución

Según las corrientes indicadas en el circuito, las impedancias propias de malla y copedancia serán

$$z_{11} = R_1 + j\omega L = 5 + j50 \tag{1}$$

$$z_{22} = R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10 + j30 \tag{2}$$

$$z_{12} = z_{21} = -\left(j\omega L\right) = -j50 \tag{3}$$

quedando el sistema matricial en el dominio fasorial como sigue

$$\begin{bmatrix} 5 + j50 & -j50 \\ -j50 & 10 + j30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

de donde

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\Delta Z}{\Delta 11} = \frac{105 + j650}{-j50} = 30 - j25. \tag{5}$$

Luego, resolviendo el sistema matricial las corrientes serán

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = 4{,}33 + j3{,}6 = 5{,}63\underline{/39{,}8^\circ} \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_2 = 4{,}69 + j7{,}57 = 8{,}9\underline{/58{,}24^\circ}. \tag{7}$$

Las tensiones en cada elemento para el diagrama fasorial se calculan a continuación

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{R}_1} = 28{,}17\underline{/39{,}8^\circ} \tag{8}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{R}_2} = 89\underline{/58{,}24^\circ} \tag{9}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{L}} = 199{,}18\underline{/-5{,}19^\circ} \tag{10}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{C}} = 178{,}15\underline{/-31{,}76^\circ}, \tag{11}$$

en la figura 2 se muestra el diagrama fasorial completo.

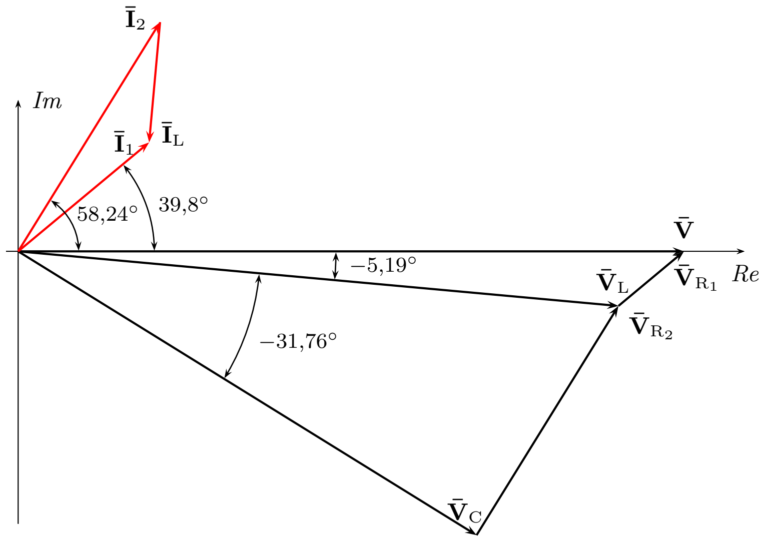

Figura 2: Diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

La potencia compleja en el generador está dada por

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{I}}_1^* = 952{,}13 - j793{,}44, \tag{12}$$

de donde

$$P = 952{,}13\mathrm{W} \tag{13}$$
$$Q = 793{,}44\mathrm{VAR} \tag{14}$$
$$S = 1239{,}4\mathrm{VA} \tag{15}$$

en adelanto, es decir que el sistema es de carácter capacitivo.

Las potencias activas en cada resistor serán

$$P_1 = |\bar{\mathbf{I}}_1|^2 R_1 = 158{,}7\mathrm{W} \tag{16}$$
$$P_2 = |\bar{\mathbf{I}}_2|^2 R_2 = 793{,}5\mathrm{W} \tag{17}$$
$$P_1 + P_2 = 952{,}13\mathrm{W} \tag{18}$$

que verifica la potencia total activa entregada por el generador.

En $t > 0$, y con la fuente de tensión pasivada $v_{\mathrm{in}}(t > 0) = 0$ las condiciones iniciales vienen dada por el valor instantáneo que toman los fasores en $t = 0$, es decir

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathrm{L}} = \bar{\mathbf{I}}_1 - \bar{\mathbf{I}}_2 = -0{,}36 - j3{,}97 = 3{,}99\underline{/-95{,}2^\circ} \tag{19}$$
$$\therefore i_{\mathrm{L}}(0) = 3{,}99\sqrt{2}\cos(50t - 95{,}2^\circ)\Big|_{t=0} = -0{,}51\mathrm{A} \tag{20}$$

y

$$\bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{C}} = \bar{\mathbf{I}}_2\left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = 151{,}47 - j93{,}77 = 178{,}15\underline{/-31{,}76^\circ} \tag{21}$$
$$\therefore v_{\mathrm{C}}(0) = 178{,}15\sqrt{2}\cos(50t - 31{,}7^\circ)\Big|_{t=0} = 214{,}22\mathrm{V} \tag{22}$$

Para determinar la corriente por el inductor $i_{\mathrm{L}}(t)$ para $t > 0$ se consideran las corrientes i_1, i_{L} e i_2, definiendo todas las tensiones en los elementos como caídas, entonces en el nudo principal tenemos

$$i_1 - i_{\mathrm{L}} - i_2 = 0 \tag{23}$$

y las tensiones en cada malla serán

$$v_{\mathrm{R}_1} + v_{\mathrm{L}} = 0 \tag{24}$$
$$v_{\mathrm{L}} - v_{\mathrm{R}_2} - v_{\mathrm{C}} = 0 \tag{25}$$

con v_{R_1} la tensión a bornes de la resistencia de 5Ω y v_{R_2} la tensión a bornes de la resistencia de 10Ω. Utilizando la relación tensión-corriente de cada elemento (y recordando que todas las tensiones se eligieron como caídas respecto de las corrientes que atraviesan cada elemento) tenemos

$$v_{\mathrm{R}_1} = R_1 i_1 \tag{26}$$

$$v_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} \tag{27}$$

$$v_{\mathrm{R}_2} = R_2 i_2 \tag{28}$$

$$i_2 = C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} \tag{29}$$

luego, reemplazando en las ecuaciones de equilibrio

$$-\frac{1}{R_1}\left(L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right) - i_{\mathrm{L}} - \frac{1}{R_2}\left(L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} - v_{\mathrm{C}}\right) = 0 \tag{30}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} - R_2 C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} - v_{\mathrm{C}} = 0 \tag{31}$$

despejando v_{C} de (30)

$$v_{\mathrm{C}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + R_2 i_{\mathrm{L}} \tag{32}$$

llevando a (31) y operando

$$L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} - R_2 C\left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{d}t^2} + R_2\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right] - \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + R_2 i_{\mathrm{L}}\right] = 0 \tag{33}$$

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1}\right)\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_{\mathrm{L}} = 0 \tag{34}$$

en forma numérica

$$3\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{d}t^2} + 210\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + 1000 i_{\mathrm{L}} = 0 \tag{35}$$

las raíces de la ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial son

$$s_1 = -64{,}86; \quad s_2 = -5{,}14 \tag{36}$$

por lo tanto la respuesta completa será

$$i_{\mathrm{L}} = Ae^{-64{,}86t} + Be^{-5{,}14t} \tag{37}$$

ya que como no existe fuente forzante, la respuesta forzada es nula.

Para encontrar los valores de A y B se tiene que

$$i_{\mathrm{L}}(0) = A + B = -0{,}51 \tag{38}$$

y haciendo $t = 0$ en la (32)

$$v_{\mathrm{C}}(0) = 3\left.\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + 10 i_{\mathrm{L}}(0) \tag{39}$$

$$214{,}22 = 3\left.\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} - 5{,}1 \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

de donde

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 73{,}1 \tag{42}$$

entonces

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -64{,}86A - 5{,}14B = 73{,}1. \tag{43}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para A y B obtenemos

$$A = 1{,}27 \tag{44}$$

$$B = -1{,}78 \tag{45}$$

finalmente

$$i_{\mathrm{L}} = 1{,}27e^{-64{,}86t} - 1{,}78e^{-5{,}14t}[\mathrm{A}]. \tag{46}$$