Nombre: Legajo:

Examen Final de Teoría de los Circuitos I

19 de diciembre de 2018

Condiciones necesarias para la aprobación:

- demostrar conocimiento de todos los temas evaluados,
- resolver correctamente al menos el 60 % del examen.

Ejercicio 1. 30 P.

Dado el circuito de la figura 1,

a) determinar el sistema matricial en el dominio de s en términos de $I_L(s)$ y $V_C(s)$,

b) encontrar la función de transferencia $H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)}$ y su respuesta al impulso $h(t)$.

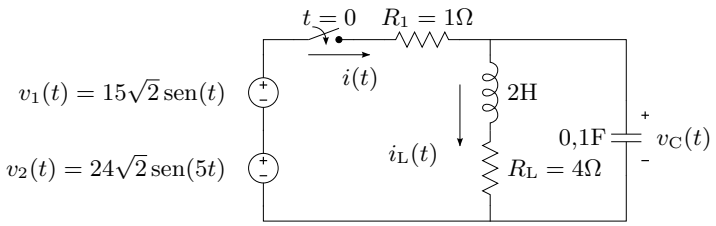


Figura 1: Circuito excitado con dos fuentes de diferente frecuencia.

Ejercicio 2. 20 P.

Suponiendo que las fuentes del circuito de la figura 1 actúan de a una por vez (mientras la otra está pasivada),

a) determinar la respuesta de régimen permanente de la corriente $i(t)$ debido a cada fuente,

b) calcular la potencia activa erogada por cada fuente actuando por separado,

c) construir el diagrama fasorial completo (puede ser cualitativo) debido a la fuente $v_2(t)$.

Ejercicio 3. 20 P.

Suponiendo ahora que ambas fuentes del circuito de la figura 1 actúan a la vez,

a) ¿cuál será la respuesta de régimen permanente de la corriente $i(t)$? Justificar la respuesta.

b) ¿que ocurre con la potencia activa erogada en total? Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. 30 P.

Suponiendo que el capacitor puede variar entre 0 e ∞, y considerando sólo la fuente $v_1(t)$

a) construir el lugar geométrico de la impedancia total vista por la fuente,

b) indicar en el gráfico los puntos más salientes (valores máximos, cortes en los ejes, etc.)

c) determinar el valor de C (si existe) para resonancia.

Solución 1.

a) Considerando la malla externa, y todas las tensiones definidas como caídas al recorrerla en sentido horario tenemos

$$v_1 + v_2 = v_{\mathrm{R}_1} + v_{\mathrm{C}} = R_1(i_{\mathrm{L}} + i_{\mathrm{C}}) + v_{\mathrm{C}} \tag{1}$$

$$= R_1 i_{\mathrm{L}} + R_1 C \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}} \tag{2}$$

donde $i(t) = i_{\mathrm{L}}(t) + i_{\mathrm{C}}(t)$. Luego, para la malla interna que no contiene las fuentes

$$v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{L}} + v_{\mathrm{R_L}} = R_{\mathrm{L}} i_{\mathrm{L}} + L \frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Transformando ambas ecuaciones

$$V_1(s) + V_2(s) = R_1 I_{\mathrm{L}}(s) + (sR_1C + 1)V_{\mathrm{C}}(s) \tag{4}$$

$$0 = (R_{\mathrm{L}} + sL)I_{\mathrm{L}}(s) - V_{\mathrm{C}}(s) \tag{5}$$

ya que todas las condiciones iniciales son nulas. En forma matricial nos queda

$$\begin{bmatrix} R_1 & sR_1C + 1 \\ -(R_{\mathrm{L}} + sL) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathrm{L}}(s) \\ V_{\mathrm{C}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(s) + V_2(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

b) Resolviendo $V_{\mathrm{C}}(s)$ para encontrar $H(s)$

$$V_{\mathrm{C}}(s) = \frac{(V_1(s) + V_2(s))(R_{\mathrm{L}} + sL)}{R_1 + (R_{\mathrm{L}} + sL)(sR_1C + 1)}, \tag{7}$$

luego

$$H(s) = \frac{V_{\mathrm{C}}(s)}{V_1(s) + V_2(s)} = \frac{R_{\mathrm{L}} + sL}{R_1LCs^2 + (R_1R_{\mathrm{L}}C + L)s + (R_1 + R_{\mathrm{L}})}. \tag{8}$$

Reemplazando por sus valores numéricos y separando en fracciones simples para antitransformar

$$H(s) = \frac{5\,(2s+4)}{s^2 + 12s + 25} = \frac{5\,(2s+4)}{(s + 9{,}3166)(s + 2{,}6833)} =$$

$$= \frac{A}{s + 9{,}3166} + \frac{B}{s + 2{,}6833} = \frac{11{,}03}{s + 9{,}3166} - \frac{1{,}0302}{s + 2{,}6833} \tag{9}$$

luego, la respuesta al impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ es

$$h(t) = 11{,}03e^{-9{,}3166t} - 1{,}0302e^{-2{,}6833t}. \tag{10}$$

Solución 2.

a) Pasivando la fuente $v_2(t)$, la respuesta de régimen permanente de corriente en el dominio fasorial será

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\mathbf{Z}}, \tag{11}$$

donde

$$\mathbf{Z} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{(R_{\mathrm{L}} + j\omega L)} + j\omega C}. \tag{12}$$

Numéricamente, y recordando que la frecuencia de la fuente v_1 es $w = 1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ tenemos

$$\mathbf{Z}|_{\omega=1} = 6\Omega \tag{13}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{15}{6} = 2{,}5\underline{/0^\circ}\mathrm{A}. \tag{14}$$

Pasivando ahora la fuente $v_1(t)$, con $w = 5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$$\mathbf{Z}|_{\omega=5} = 1{,}2 - j2{,}4\Omega \tag{15}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{24}{1{,}2 - j2{,}4} = 4 + j8 = 8{,}9442\underline{/63{,}43^\circ}\mathrm{A}. \tag{16}$$

b) La potencia activa erogada por cada fuente puede calcularse en el dominio fasorial como

$$P = |\bar{\mathbf{V}}||\bar{\mathbf{I}}|\cos(\varphi), \tag{17}$$

considerando que cada fuente actúa por separado, entonces

$$P_1 = 15 \cdot 2{,}5\cos(0°) = 37{,}5\text{W} \tag{18}$$

$$P_2 = 24 \cdot 8{,}9442\cos(63{,}43°) = 60\text{W}. \tag{19}$$

c) El diagrama fasorial de tensiones y corrientes cuando actúa sólo la fuente $v_2(t)$ puede verse en la figura 2. Los valores numéricos de cada parámetro son

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}} = \frac{\bar{\mathbf{I}}}{\frac{1}{R_\text{L}+j\omega L} + j\omega C} = \frac{4+j8}{0{,}2-j2{,}4} = 20 - j8\text{V} \tag{20}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{R}_1} = \bar{\mathbf{I}}R_1 = 4 + j8\text{A} \tag{21}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_\text{L} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}}}{R_\text{L} + j\omega L} = -j2\text{A} \tag{22}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_\text{L} = \bar{\mathbf{I}}_\text{L} j\omega L = 20\text{V} \tag{23}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{R}_\text{L}} = \bar{\mathbf{I}}_\text{L} R_\text{L} = -j8\text{V} \tag{24}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_\text{C} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\text{paralelo}}}{\frac{1}{j\omega C}} = 4 + j10\text{A}. \tag{25}$$

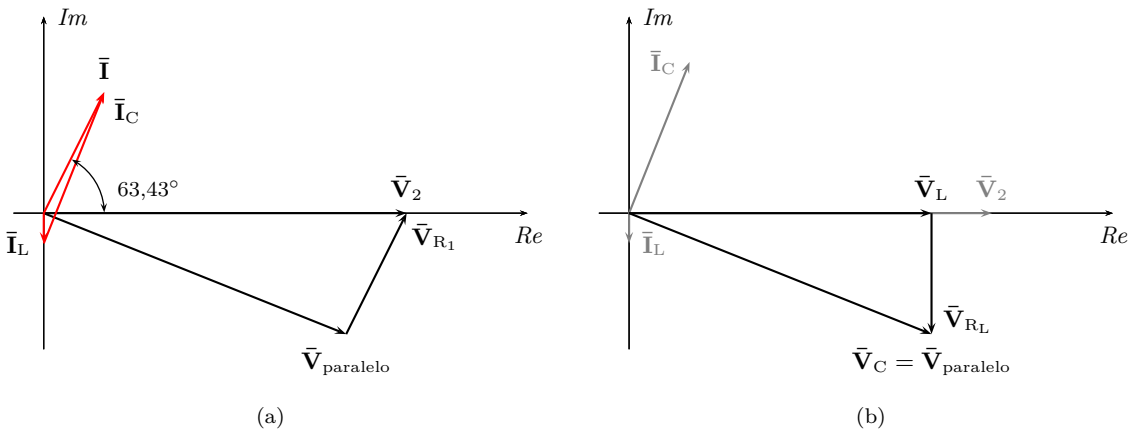


Figura 2: Diagrama fasorial de tensiones y corrientes (a), y detalle de las tensiones del paralelo (b).

Solución 3.

a) La respuesta de corriente de régimen permanente será la suma de las respuestas, por teorema de superposición.

$$i(t) = 2{,}5\sqrt{2}\,\text{sen}(t) + 8{,}95\sqrt{2}\,\text{sen}(5t + 63{,}43°)[\text{A}]. \tag{26}$$

b) Para el caso de las potencias no puede aplicarse el teorema de superposición, ya que el sistema no es lineal en la potencia. En general, dos respuestas $i_1(t)$ e $i_2(t)$ disipan sobre un mismo resistor R las potencias medias dadas por

$$P_1 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} R i_1(t)^2\,\text{d}t \tag{27}$$

$$P_2 = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} R i_2(t)^2\,\text{d}t \tag{28}$$

Luego, si se consideran ambas respuestas

$$P_\text{T} = \frac{1}{T}\int_0^{T} R(i_1(t) + i_2(t))^2\,\text{d}t = \tag{29}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T} R i_1(t)^2\,\text{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T} R i_2(t)^2\,\text{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T} R 2 i_1(t) i_2(t)\,\text{d}t \neq P_1 + P_2 \tag{30}$$

Sin embargo, si las corrientes i_1 e i_2 son ortogonales (por ser respuestas de fuentes ortogonales) como este caso, se cumple que[1].

$$\int_0^T i_1(t)i_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T 2{,}5\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t)\,8{,}95\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(5t+63{,}43^\circ)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{31}$$

Luego

$$P_\mathrm{T} = P_1 + P_2 = 37{,}5 + 60 = 97{,}5\mathrm{W}. \tag{32}$$

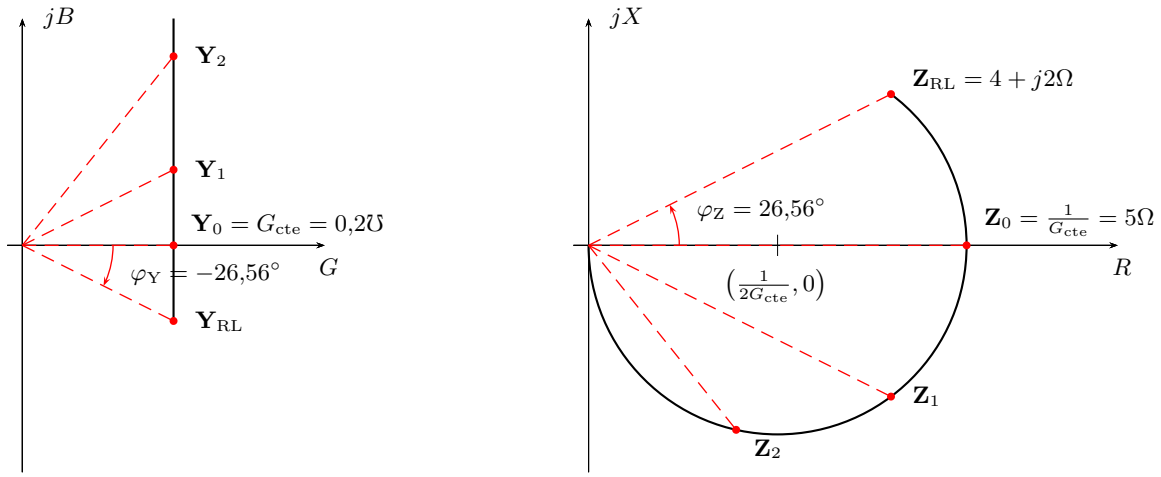
Solución 4.

a) Para construir el lugar geométrico de la impedancia total comencemos por resolver el paralelo donde se encuentra el parámetro variable. La admitancia de la rama RL para la frecuencia de la fuente será

$$\mathbf{Y}_\mathrm{RL} = \frac{1}{R+j\omega L} = 0{,}2 - j0{,}1 = 4{,}4721\underline{/-26{,}56^\circ}\mho. \tag{33}$$

La admitancia de la rama capacitiva $\mathbf{Y}_\mathrm{C} = j\omega C$ es variable ($0 < j\omega C < \infty$), que sumada a la admitancia fija $\mathbf{Y}_\mathrm{RL}$ generan el lugar geométrico de admitancia del paralelo $\mathbf{Y}_\mathrm{p}$ (figura 3a). La inversa de $\mathbf{Y}_\mathrm{p}$ será un arco de circunferencia de radio $1/G_\mathrm{cte} = 5$, y con centro en el punto $(5, 0)$. Este arco de circunferencia corresponde al lugar geométrico de $\mathbf{Z}_\mathrm{p} = \frac{1}{\mathbf{Y}_\mathrm{p}}$, se extiende por todo el cuarto cuadrante y hasta la intersección con la recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\varphi_1 = 26{,}56^\circ$, es decir hasta $\mathbf{Z}_\mathrm{RL} = \frac{1}{\mathbf{Y}_\mathrm{RL}}$. Este lugar geométrico se muestra en la figura 3b.

Finalmente, a este lugar geométrico de $\mathbf{Z}_\mathrm{p}$ se puede sumar la resistencia en serie $R_1 = 1\Omega$.



(a) Lugar geométrico de admitancia.

(b) Lugar geométrico de impedancia.

Figura 3: Lugar geométrico de la admitancia del paralelo, de forma $\mathbf{Y}_\mathrm{p} = G_\mathrm{cte} + jB$, y su correspondiente impedancia $\mathbf{Z}_\mathrm{p} = \frac{1}{\mathbf{Y}_\mathrm{p}}$.

b) En la figura 4 se puede ver el lugar geométrico de la impedancia equivalente total vista desde la fuente v_1 en régimen permanente, donde se marcan los valores más salientes del gráfico.

c) Observando el resultado obtenido para la corriente de régimen permanente en el ejercicio 2, se puede ver que el circuito está en resonancia para la fuente $v_1(t)$, por lo tanto el valor de capacidad correspondiente para resonancia es $C = 0{,}1\mathrm{F}$.

[1] Notar que el período T de las señales no es el mismo, por lo que la integración se realiza sobre el período mayor, que contiene un número entero de períodos del menor. En este caso $T_2 = 5T_1$

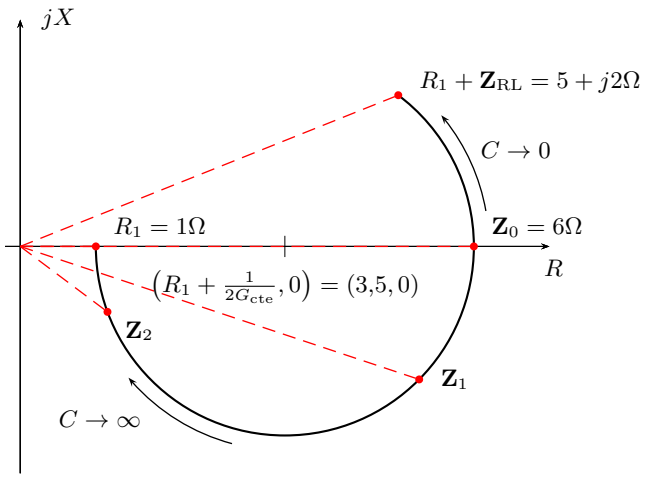


Figura 4: Lugar geométrico de $\mathbf{Z}$ vista desde la fuente $v_1(t)$.